Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Sui flessi di specie superiore delle curve piane

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 117–123.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Sui flessi di specie superiore delle curve piane

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si studiano gli elementi differenziali del tipo* $y = a_0x^k + \ldots$ $(k \geq 4)$ *delle curve piane facendo uso delle polari di una generica curva algebrica di ordine* k *che li contenga.*

1. In una Nota del 1943 il BOMPIANI prende in esame i flessi di 2ª specie e di specie superiore delle curve piane [1]. Seguendo un procedimento da lui stesso indicato in una Nota del 1926 [2], determina un riferimento invariante, mostra l'esistenza e dà un significato geometrico dei $k - 4$ invarianti proiettivi posseduti da un E_{2k-2} di flesso contenente l'E_k $y = a_0x^k$.

Nella presente Nota riprendo in esame l'analisi dei flessi $y = a_0x^k + \ldots$ $(k \geq 4)$, servendomi delle polari di una generica C^k del piano contenente un elemento del tipo indicato. Riottengo, in tal modo, tutti i risultati ottenuti dal BOMPIANI per altra via e, oltre che assegnare un nuovo significato geometrico ai $k - 4$ invarianti posseduti da un E_{2k-2}, pongo in luce l'esistenza ed assegno un'interpretazione geometrica agli $h - 2$ $(3 \leq h \leq k - 2)$ invarianti proiettivi posseduti da un E_{k+h} contenente l'E_k $y = a_0x^k$. Esprimo mediante birapporti gli r invarianti proiettivi che un E_{2k+r} $(1 \leq r \leq k - 2)$, contenente l'E_k, possiede oltre quelli di E_{2k}. Infine applico i risultati ottenuti allo studio delle singolarità dell'Hes-

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

Ringrazio vivamente il prof. MARIO VILLA per i suggerimenti e consigli che mi diede per questo lavoro e che continuamente mi dà durante i miei studi.

(1) Si veda: E. BOMPIANI, *Analisi dei flessi di specie superiore delle curve piane*, « Boll. U. M. I. », II, 5, 1943.

(2) Si veda: E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo differenziale delle singolarità*, « Boll. U. M. I. », I, 5, 1926.

siana di una quartica piana ([3]), dopo aver caratterizzato geometricamente un particolare tipo di flesso già studiato da B. Su ([4]).

2. Invarianti proiettivi di un E_{k+h} ($3 \leq h \leq k-2$) di flesso di specie $k-2$. Si abbia un flesso di specie $k-2$

$$y = a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots \qquad a_0 \neq 0, \ k \geq 5. \tag{2.1}$$

riferito ad un sistema di coordinate proiettive non omogenee, con l'origine O nel suo centro e con la retta $y=0$ coincidente con la tangente inflessionale; sia inoltre

$$\begin{aligned} y + y(b_{11}x + b_{02}y) + \ldots + y(b_{k-21}x^{k-2} + \ldots + b_{0k-1}y^{k-2}) - \\ - a_0x^k + \ldots + b_{0k}y^k = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

l'equazione di una generica C^k del piano, avente un flesso nell'origine con lo stesso E_k di (2.1). Si ha:

La polare armonica di O *rispetto ad una generica* C^k *del piano contenente un* E_{k+1} *del tipo* $y = a_0x^k + a_1x^{k+1}$, *incontra la tangente inflessionale in un punto* A_{k+1} *che non varia al variare della* C^k *considerata.*

Infatti affinchè la C^k (2.2) contenga l'E_{k+1} (2.1) occorre sia

$$b_{11}a_0 + a_1 = 0. \tag{2.3}$$

D'altra parte la polare armonica di O ha l'equazione

$$k - 1 + b_{11}x + b_{02}y = 0.$$

Essa incontra la tangente $y=0$ nel punto di ascissa $x = -\frac{k-1}{b_{11}}$, ossia, tenendo conto della (2.3), $x = \frac{a_0(k-1)}{a_1}$.

Il punto A_{k+1} è quindi un punto invariante dipendente dall'E_{k+1} $y = a_0x^k + a_1x^{k+1}$ ([5]). Noi l'assumeremo come punto improprio dell'asse x (onde $a_1 = b_{11} = 0$).

In generale:

La C^h *in cui si spezza la polare di ordine* $h+1$ *di* O *rispetto*

([3]) Il problema riguardante le singolarità della curva Hessiana è stato ampliamente trattato e risolto in due modi diversi da M. Villa nel caso generale. Si veda al riguardo: M. Villa, *Sulla multiplicità e sulle tangenti della curva Hessiana*. « Rend. Ist. Lomb. », II, 65, 1932.

([4]) Si veda: B. Su, *An extension of Bompiani 's osculants for a plane curve with a singolar point,* « Tôhoku Math. Journ. », 45, 1939, pp. 239-244

([5]) Tale punto coincide col punto invariante definito dal Bompiani (op. cit. nella ([1])) per altra via.

ad una generica C^k *del piano contenente un* E_{k+h} $(1 \leq h \leq k-2)$ *del tipo* $y = a_0 x^k + \ldots + a_h x^{k+h}$, *incontra la tangente inflessionale in un gruppo di punti* $A^1{}_{k+h}, A^2{}_{k+h}, \ldots, A^h{}_{k+h}$ *che non variano al variare della* C^k. *Tali punti dipendono perciò dall'* E_{k+h} *che la* C^k *contiene ed assieme al punto* O *individuano* $h-2$ *invarianti proiettivi esprimibili mediante birapporti.*

Il gruppo di punti invarianti $A^1{}_{k+i}, A^2{}_{k+i}, \ldots, A^i{}_{k+i}$ $(1 \leq i < h)$ *che l'* E_{k+i}, *contenuto nell'* E_{k+h}, *determina sulla tangente, costituiscono il gruppo polare di ordine* i *di* O *rispetto al gruppo di punti individuato dall'* E_{k+h}.

Infatti una generica C^k del piano contenente l' E_{k+h} (2.1), scelto il riferimento nel modo indicato, ha l'equazione

$$(2.4)\quad y + b_{02}y^2 + y(b_{21}x^2 + \ldots + b_{03}y^2) + \ldots + y(b_{k-2\,1}x^{k-2} + \ldots + b_{0\,k-1}y^{k-2}) - \\ - a_0 x^k + \ldots + b_{0k}y^k = 0$$

dove le b_{r1} $(2 \leq r \leq h)$ soddisfano alle relazioni

$$(2.5)\quad a_j + b_{21}a_{j-2} + b_{31}a_{j-3} + \ldots + b_{j-2\,1}a_2 + b_{j1}a_0 = 0, \qquad j = 2, 3, \ldots, h.$$

La C^h in cui si spezza la polare di ordine $h+1$ di O rispetto a C^k ha l'equazione

$$(k-1)\ldots(h+1) + (k-2)\ldots h b_{02}y + \ldots + \\ + (k-h-1)\ldots 3\cdot 2(b_{h1}x^h + \ldots + b_{0\,h+1}y^h) = 0.$$

I punti in cui tale curva incontra la tangente $y = 0$ sono quelli di ascisse soddisfacenti l'equazione

$$(k-1)\ldots(h+1) + (k-3)\ldots(h-1)b_{21}x^2 + \ldots + \\ + (k-h-1)\ldots 3\cdot 2 b_{h1}x^h = 0.$$

Ora poichè i coefficienti b_{r1} dipendono, per le (2.5), dai coefficienti a_j $(j = 0, 1, \ldots, h)$ dell'elemento (2.1), seguono le proprietà enunciate.

Per $h = k-2$ si ritrovano i risultati di Bompiani, identificandosi il gruppo di punti A_{2k-2} con quello che il Bompiani stesso associa, in modo diverso, ad un E_{2k-2} dello stesso tipo [6].

[6] Infatti nel caso $h = k-2$ risolvendo il sistema (2.5) si ha

$$b_{r1} = \frac{D_r}{a_0^{r-1}}, \text{ dove } D_r = -\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & \ldots 0 & a_3 \\ a_2 & 0 & a_0 & \ldots 0 & a_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-2} & a_{r-3} & a_{r-4} & \ldots 0 & a_r \end{vmatrix}.$$

Le ascisse dei punti invarianti sono le radici dell'equazione

$$(2.6)\quad (k-1)a_0^{k-3} + (k-3)a_0^{k-4}D_2x^2 + \ldots + (k-h-1)a_0^{k-h-2}D_hx^h + \ldots + D_{k-2}x^{k-2} = 0.$$

È assai agevole, mediante le curve polari, finire di fissare un riferimento proiettivo intrinsecamente legato ad un elemento differenziale del tipo considerato. Si ha intanto:

La retta polare del punto A_{k+1} *rispetto ad una generica* C^k *contenente un* E_{2k-1} *del tipo assegnato non varia al variare della* C^k. Essa dipende perciò soltanto dall'E_{2k-1} e può assumersi come retta $x=0$ del sistema di riferimento.

Infine si ha che:

La polare armonica di O *è la stessa per tutte le* C^k *che passano per un* E_{2k} *del tipo indicato.*

Tale retta può assumersi come retta impropria del piano.

Il punto unità si può fissare osservando col BOMPIANI che è unica la C^k contenente E_{2k} ed avente nel punto improprio dell'asse y (punto invariante) un punto $(k-1)$-plo. Una retta per esso e per uno dei punti invarianti determinati sulla tangente incontra ulteriormente la C^k in un punto che può essere assunto come punto unità.

3. Invarianti proiettivi di un E_{2k+r} $(1 \leq r \leq k-2)$ di flesso di specie $k-2$. È già noto (7) che ogni E_{2k+r} $(r>0)$ possiede r

D'altra parte i punti invarianti definiti dal BOMPIANI sono quelli le cui ascisse soddisfano l'equazione

$$a_0(-2\alpha p_{k-3}+\alpha^2 p_{k-4})+\sum_{2}^{k-4}{}_s\, a_s P_{k-s-2}+a_{k-2}=0, \tag{2.7}$$

dove $\alpha=\dfrac{1}{x}$ e le P_h e p_j soddisfano ai sistemi

$$a_0 P_h+\sum_{2}^{h-2}{}_s\, a_s P_{h-s}+a_h=0, \qquad 2\leq h\leq k-3 \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} P_j=p_j-2\alpha p_{j-1}+\alpha^2 p_{j-2}, \\ p_1=2\alpha,\ p_2=P_2+2\alpha p_1-\alpha^2. \end{cases} \qquad 3\leq j\leq k-3 \tag{2.9}$$

Ricavando le P_h dalle (2.8) si ha

$$P_h=\frac{D_h}{a_0^{\,h-1}}, \tag{2.10}$$

essendo D_h un determinante del tipo precedente. Ricavando poi le p_j dalle (2.9) si ottiene

$$p_j=(j+1)\alpha^j+(j-1)P_2\alpha^{j-2}+\ldots+P_j=0. \tag{2.11}$$

Infine sostituendo nella (2.7) a p_{k-3} e p_{k-4} i valori dati dalla (2.11) e a P_{k-s-2} quelli dati dalla (2.10), tenendo conto della relazione

$$-\sum_{2}^{k-4}{}_s\, a_s D_{k-s-2}a_0^{\,s-1}-a_{k-2}a_0^{\,k-4}=D_{k-2},$$

si ottiene la (2.6).

(7) Si veda: BOMPIANI, op. cit. nella (1).

invarianti proiettivi oltre quelli di E_{2k}. Si vedrà in questo numero come sia possibile ricondurre a dei birapporti gli r invarianti proiettivi $(1 \leq r \leq k-2)$ individuati da un E_{2k+r}.

Si consideri una generica C^k contenente l'E_{2k+i} $y = a_0 x^k + \ldots + a_{k+i} x^{2k+i}$ $(1 \leq i \leq k-3)$. Si indichi con G_i il gruppo degli $i+1$ punti intersezione della retta impropria (invariante) colla C^{i+1} in cui si spezza la polare di ordine $i+2$ di O rispetto a C^k. Si ha:

Il punto B_{2k+i}, *centro armonico di ordine uno di* A_{k+1} *rispetto al gruppo* G_i, *non varia al variare della* C^k *considerata ma dipende solo dall'* E_{2k+i} *che la* C^k *contiene.*

Infatti si riferiscano l'E_{2k+i} e la C^k al sistema di riferimento fissato al n. 2. La C^k avrà l'equazione (2.4) essendo i coefficienti b_{rs} vincolati dalle (2.5) (con $j = 2, 3, \ldots, k-2$) e dalle relazioni

$$(3.1)\quad \begin{cases} a_{k+j} + b_{21} a_{k+j-2} + \ldots + b_{k-21} a_{j+2} + b_{12} A_{j-1} + \ldots + b_{j-22} A_2 + b_{j2} A_0 = 0 \\ \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, i) \\ b_{k-11} = 0 \\ b_{02} = 0 \end{cases}$$

dove A_p è il coefficiente di x^{2k+p} nello sviluppo del quadrato $(a_0 x^k + a_2 x^{k+2} + \ldots)^2$. Il gruppo G_i dei punti intersezione della retta impropria colla C^{i+1}, in cui si spezza la polare di ordine $i+2$ di O rispetto a C^k, sono rappresentati, in coordinate omogenee x, y, dall'equazione

$$(3.2)\qquad b_{i+11} x^{i+1} + b_{i2} x^i y + \ldots + b_{0i+2} y^{i+1} = 0.$$

Il centro armonico d'ordine uno di A_{k+1} (1,0) rispetto a G_i ha coordinate omogenee soddisfacenti l'equazione

$$(3.3)\qquad (i+1)\, b_{i+11} x + b_{i2} y = 0.$$

Essendo b_{i+11} e b_{i2} esprimibili, attraverso le (2.5) e le (3.1), mediante le a_j $(j = 0, 2, \ldots, k+i)$, la proprietà resta provata.

Si ha quindi:

Un E_{2k+r} $(1 \leq r \leq k-3)$ *determina sulla retta invariante, assunta come retta impropria,* r *punti invarianti* B_{2k+i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *che sono i centri armonici d'ordine uno di* A_{k+1} *rispetto ai gruppi* G_i, *intersezione colla retta impropria delle* C^{i+1} *in cui si spezzano le polari d'ordine* $i+2$ *di* O *rispetto alle* C^k *contenenti l'*E_{2k+i} *di* E_{2k+r}. *Se ad essi si associano i tre punti fondamentali del riferimento proiettivo invariante, giacenti sulla retta impropria, gli* r *invarianti proiettivi dell'* E_{2k+r} *sono esprimibili mediante gli* r *birapporti che tali punti individuano.*

Si ha pure:

L'ulteriore punto (oltre il punto O) *in cui la conica polare* *di* A_{k+1}, *rispetto ad una generica* C^k *contenente un* E_{3k-2} *del tipo considerato, incontra la retta* $x = 0$, *è lo stesso per tutte le* C^k *e dipende solo dall'* E_{3k-2} *che esse contengono.*

Questo punto, assieme ai punti fondamentali del riferimento sulla $x = 0$, determina un birapporto che è un invariante proiettivo dell' E_{3k-2}.

4. Su un particolare tipo di flesso. B. Su, in una Nota del 1938 [8], iniziando lo studio dei flessi di specie superiore delle curve piane, si limita a considerare un tipo particolare di flesso che egli ottiene ponendo delle condizioni analitiche restrittive tra i coefficienti dello sviluppo che lo rappresentano nell'intorno del suo centro. Non assegna però, a quanto pare, nessuna interpretazione geometrica alle condizioni poste.

Orbene questo tipo particolare di flesso non è altro che quello in cui *i* $k-2$ *punti invarianti* A^h_{2k-2} $(h = 1, 2, \ldots, k-2)$ *coincidono tutti col punto* A_{k+1}, *determinato sulla tangente dall'* E_{k+1} *di* E_{3k-2} [9].

5. Flessi di 2ª specie; un'applicazione. Se $k = 4$, cioè il flesso è di 2ª specie, dalle proprietà generali viste al n. 2, segue in particolare che l' E_5 determina sulla tangente un punto invariante A_5 e l' E_6 due punti invarianti A_6^1, A_6^2 che dividono armonicamente la coppia OA_5; l' E_8 determina un riferimento proiettivo intrinseco, rispetto al quale l' elemento è rappresentabile dall' equazione canonica

$$y = -2(x^4 + 3x^6 + 9x^8) + \ldots .$$

La considerazione dei flessi di tipo particolare, fatta al n. 4, porge immediatamente, ed in forma assai semplice, una condizione necessaria e sufficiente cui deve soddisfare un punto P semplice di una quartica piana per essere doppio per l' Hessiana. Sussiste il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un punto P, *semplice per una curva piana* F *del 4º ordine, sia doppio per l' Hessiana* H *di* F *è che* P *sia un flesso di 2ª specie del tipo particolare considerato al* n. 4.

[8] Si veda: B. Su, op. cit.

[9] Infatti affinchè coincidano in A_{k+1} i punti A^h_{2k-2} $(h = 1, 2, \ldots, k-2)$, occorre e basta si abbia $a_2 = a_3 = \ldots = a_{k-2} = 0$. Tali condizioni coincidono appunto con quelle poste da B. Su, quando si osservi che il punto invariante associato da tale Autore all' E_{k+1} coincide col punto A_{k+1}.

Per la dimostrazioue premettiamo il seguente teorema di M. V. CORRADI [10]:

Affinchè un punto P, semplice per una curva piana algebrica F, sia doppio per la Hessiana H di F, occorre e basta che P sia punto di ondulazione e che la conica in cui si decompone la cubica polare di P sia tangente alla tangente in P ad F.

Ma nel caso in cui F sia del 4° ordine dire che la conica suddetta è tangente alla tangente inflessionale equivale a dire che i punti A_6^1, A_6^2, individuati dall' E_6 della curva sulla tangente, vanno a coincidere col punto A_5 [11], cioè che il flesso è del tipo particolare considerato al n. 4.

Osserviamo infine che la singolarità dell'Hessiana in un punto P di una curva algebrica piana, non dipende esclusivamente dall'intorno di P sulla curva, ma anche da proprietà e caratteri della curva stessa indipendenti dall'intorno. Così ad esempio il fatto stesso che il teorema sopra stabilito valga solamente per le curve algebriche del 4° ordine, ci assicura della dipendenza delle singolarità dell'Hessiana dàll'ordine della curva considerata. Non sussiste infatti lo stesso teorema se l'ordine della curva è ≥ 5.