# Bollettino Unione Matematica Italiana



Luigi Gatteschi


## Un perfezionamento di un teorema di I. Schur sulla frequenza dei numeri primi


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **2** (1947), n.2, p. 123–125.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

**Un perfezionamento di un teorema di I. Schur sulla frequenza dei numeri primi.**

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Firenze) (*).

**Sunto.** - *Si prova che a partire da* $x = 24$ *esiste sempre almeno un numero primo più grande di* x *e più piccolo di* $11x/9$

I. SCHUR (¹) ha dimostrato il seguente teorema:

*Per* $x \geqq 29$ *c'è almeno un numero primo* p *che soddisfa la condizione* $x < p \leqq \frac{5}{4}x$.

(¹⁰) Si veda: M V. CORRADI, *Sulle singolarità della curva Hessiana*, « Boll. U. M. I. », II, 3, 1941.

(¹¹) È facile provare che se la conica, in cui si decompone la cubica polare di *P*, è tangente alla tangente in *P* alla curva, il suo punto di contatto è necessariamente il punto in cui essa è incontrata dalla polare armonica di *P*.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(¹) I. SCHUR, *Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitatsfragen I.* « Sitzungsberichten der Preussischen Akademie der Wissenschaften », Phis. Math. Klasse 1929, pp. 125 136.

Il teorema può essere così perfezionato:

*Se* $x \geqq 24$ *esiste almeno un numero primo* $p$ *che soddisfa la condizione* $x < p < \frac{11}{9} x$.

Indichi $\vartheta(x)$ la somma

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p$$

con la somma estesa a tutti i numeri primi $p$ non superiori ad $x$.

Valgono per $\vartheta(x)$ le limitazioni [2]

$$\vartheta(x) < \frac{6}{5} ax + 3 \log^2 x + 8 \log x + 5, \tag{1}$$

$$\vartheta(x) > ax - \frac{12}{5} a\sqrt{x} - \frac{3}{2} \log^2 x - 13 \log x - 15, \tag{2}$$

dove

$$a = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{,}92129\ldots .$$

Poichè per $y > 12$ risulta

$$3y^2 + 8y + 5 < 4y^2, \qquad \frac{2}{3} y^2 + 13y + 15 < 3y^2,$$

avremo, per $x > e^{12}$

$$\vartheta(x) < \frac{6}{5} ax + 4 \log^2 x, \tag{3}$$

$$\vartheta(x) > ax - \frac{12}{5} a\sqrt{x} - 3 \log^2 x. \tag{4}$$

Dalla (3) e dalla (4), per l'intervallo $\left(x, \frac{11}{9}\right)$ abbiamo:

$$\vartheta\left(\frac{11}{9} x\right) - \vartheta(x) > \frac{11}{9} ax - \frac{12}{5} a\sqrt{\frac{11}{9} x} - 3 \log^2 \left(\frac{11}{9} x\right) - \frac{5}{6} ax - 4 \log^2 x,$$

cioè

$$\vartheta\left(\frac{11}{9} x\right) - \vartheta(x) > \frac{1}{45} ax - \frac{4}{5} a\sqrt{11x} - 3 \log^2 \frac{11}{9} -$$
$$- 6 \log \frac{11}{9} \cdot \log x - 7 \log^2 x .$$

Ed essendo

$$\frac{1}{45} a > 0{,}02, \quad \frac{4}{5} a\sqrt{11} < 2{,}5, \quad 3 \log^2 \frac{11}{9} < 0{,}13, \quad 6 \log \frac{11}{9} < 1{,}21,$$

avremo

$$\vartheta\left(\frac{11}{9} x\right) - \vartheta(x) > 0{,}02x - 2{,}5\sqrt{x} - 0{,}13 - 1{,}21 \log x - 7 \log^2 x .$$

[2] E. Landau, « Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen », Berlin 1909, Bd. I, p. 91.

Avendosi ora

$$\vartheta\left(\frac{11}{9}e^{12}\right) - \vartheta(e^{12}) > 1223$$

e risultando la funzione

$$0{,}02x - 2{,}5\sqrt{x} - 0{,}13 - 1{,}21 \log x - 7 \log^2 x$$

crescente per $x > e^{12}$ potremo dire che esiste almeno un numero primo compreso fra $x$ e $\frac{11}{9}x$ quando $x > e^{12} = 162754, \ldots$.

Un' ispezione sulla tavola dei numeri primi (³) ci mostra come il teorema valga anche per l'intervallo $24 \leqq x \leqq 162754$.