Marco Cugiani

Nuova osservazione sopra un vecchio teorema di Liouville

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 125–128.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Nuova osservazione sopra un vecchio teorema di Liouville.

Nota di MARCO CUGIANI (a Novara)

Sunto. - *Prendendo lo spunto da un antico teorema di* LIOUVILLE, *generalizzato in una precedente nota da* G. RICCI, *si dimostra con argomentazioni più semplici di quelle che ricorrono nella dimostrazione del teorema di* LINDEMANN *che il numero e non può soddisfare ad una certa classe di equazioni del tipo* $\sum_s \gamma_s e^{k_s} = 0$, *dove i* γ_s *e i* k_s *sono numeri algebrici appartenenti al campo* K(j) *di* JACOBI-EISENSTEIN. *Si aggiungono varie osservazioni sull'argomento.*

J. LIOUVILLE dimostrò che qualunque sia la terna di numeri razionali interi (a, b, c) si ha sempre: $ae^2 + be + c \neq 0$, $ae^4 + be^2 + c \neq 0$.

Tale dimostrazione è più antica di quella del teorema di HERMITE ed è fondata su considerazioni assai più semplici (¹).

Usando di considerazioni analoghe ed altrettanto semplici G. RICCI dimostrò la seguente proposizione, in cui il teorema di LIOUVILLE rientra come caso particolare:

qualunque sia l'intero razionale non nullo t e qualunque sia la quintupla di numeri non tutti nulli $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ interi appartenenti al campo $K(i)$ di GAUSS, risulta:

$$\gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{2}{t}} + \gamma_2 e^{-\frac{2}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{2i}{t}} + \gamma_4 e^{-\frac{2i}{t}} \neq 0 \ (^2).$$

(³) Cfr. ad es. L. POLETTI, *Tavole dei numeri primi entro limiti diversi e tavole affini*, Milano, 1920.

(¹) Ved. J. LIOUVILLE, « Journal de Mathématiques », t. 5° (1840), pp. 192-194.

(²) Ved. G. RICCI: « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana ». Anno XIII, n. 2, aprile 1934, pp. 89-92.

Ora noi vogliamo far vedere come, modificando lo schema di ragionamento usato da G. RICCI, si possa dimostrare il seguente teorema:

qualunque sia l'intero razionale t, *non nullo, e quali che siano i sette numeri non tutti nulli* $(\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6)$ *interi appartenenti al campo* K(j) *di Jacobi-Eisenstein si ha sempre:*

$$\gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{3+i\sqrt{3}}{2t}} + \gamma_2 e^{\frac{3-i\sqrt{3}}{2t}} + \gamma_3 e^{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2t}} + \gamma_4 e^{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2t}} + \gamma_5 e^{\frac{i\sqrt{3}}{t}} + \gamma_6 e^{\frac{-i\sqrt{3}}{t}} \neq 0.$$

Il teorema è ovvio se uno solo dei γ è non nullo, supporremo dunque che almeno due di tali coefficienti siano diversi da zero.

Notiamo anzitutto che se indichiamo con $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6$ le sei radici bicubiche dell'unità la superiore disuguaglianza si può scrivere

$$\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s e^{i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}} \neq 0.$$

Posto ora, al variare di n per valori interi

$$f_n(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{z^s}{s!}\,; \quad \rho_n(z) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{z^s}{s!}\,; \quad e^z = f_n(z) + \rho_n(z)$$

si ottiene per $n > |z| - 2$

$$|\rho_n(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{|z|}{n+2} + \frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right\} \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left\{1 + \right.$$
$$\left. + \frac{|z|}{n+2} + \left(\frac{|z|}{n+2}\right)^2 + \ldots\right\} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 - \frac{|z|}{n+2}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + o(1)\Big) \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Osserviamo adesso che non possono esistere sette interi consecutivi $n = n_0 + m (m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ pei quali si abbia simultaneamente

$$\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s f_n\left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right) = 0.$$

Infatti, sottraendo da ciascuna di queste uguaglianze, esclusa la prima, la precedente si otterrebbero le sei relazioni, lineari omogenee nei γ_s, $\sum_{s=1}^{6} \gamma_s \left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right)^n = 0$ [dove n varia dall'una all'altra assumendo i valori $n_0 + m$ con $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$] le quali sono incompatibili poichè i γ_s non sono tutti nulli e gli η_s tutti diversi fra loro.

Scegliamo poi $n = 3^h + K (h > 3, 0 \leq K \leq 6)$ intero razionale in guisa che si abbia

$$\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s f_n\left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right) \neq 0.$$

[Fissato h è sempre possibile scegliere un opportuno valore di K, in virtù della osservazione superiore].

Consideriamo ora le frazioni

$$1, \frac{\sqrt{3}}{t \cdot 1!}, \frac{(\sqrt{3})^2}{t^2 \cdot 2!}, \frac{(\sqrt{3})^3}{t^3 \cdot 3!}, \ldots, \frac{(\sqrt{3})^n}{t^n \cdot n!} = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{t^n \cdot n!}.$$

L' ultima di queste frazioni si può scrivere $\frac{3^{\frac{K+1}{2}}}{M_n}$ dove $M_n = \frac{t^n \cdot n!}{3^{\frac{n-K-1}{2}}}$ è certamente un numero razionale, essendo $n - K - 1 = 3^h - 1 \equiv 0 \pmod{2}$, ed è di più intero poichè l'esponente l_n della massima potenza di 3 che divide $n!$ soddisfa alla limitazione

$$l_n = \sum_{s=1}^{h} \left[\frac{n}{3^s}\right] = \sum_{s=1}^{h} \left[\frac{3^h + K}{3^s}\right] \geq \sum_{s=1}^{h} \left[\frac{3^h}{3^s}\right] = 3^{h-1} + 3^{h-2} + \ldots + 1 =$$
$$= \frac{3^h - 1}{3 - 1} = \frac{n - K - 1}{2}.$$

Consideriamo quindi una qualunque delle frazioni $\frac{(\sqrt{3})^r}{r! \cdot t^r}$ e facciamo il prodotto P_r della frazione considerata per M_n, avremo

$$P_r = \frac{3^{\frac{r}{2}}}{t^r \cdot r!} \cdot M_n = \frac{3^{\frac{r}{2}}}{t^r \cdot r!} \cdot \frac{t^n \cdot n!}{3^{\frac{n-K-1}{2}}} = t^{n-r} \cdot \frac{n!}{r!} \cdot \frac{1}{3^{\frac{n-K-1-r}{2}}}.$$

Osserviamo quindi che l'esponente l_r' della massima potenza di 3 che divide $\frac{n!}{r!}$ soddisfa alla limitazione

$$l_r' = l_n - l_r \geq \frac{n - K - 1}{2} - \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{r}{3^s}\right] \geq \frac{n - K - 1}{2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{r}{3^s} =$$
$$= \frac{n - K - 1 - r}{2}.$$ Dove, nel caso in cui sia $\frac{n - K - 1 - r}{2}$ un numero fratto, la superiore disuguaglianza vale certo in senso forte. Quindi sarà P_r un numero intero razionale, oppure un numero della forma $N\sqrt{3}$ dove N è intero razionale, secondo che sia r pari o dispari.

Ora le frazioni risultanti dallo sviluppo di una qualunque delle f_n che interessano il nostro studio sono del tipo $\left(\frac{i\sqrt{3}}{t}\right)^r \cdot \frac{\eta_s^r}{r!}$. Il fattore η_s^r è una unità di $K(j)$, mentre il fattore $\left(\frac{i\sqrt{3}}{t}\right)^r \cdot \frac{1}{r!}$ ha per modulo $\frac{(\sqrt{3})^r}{t^r \cdot r!}$, quindi, moltiplicando per M_n, si trasforma, per quanto abbiamo visto, o in un intero razionale (quando r è pari), o in un immaginario puro della forma $iN\sqrt{3}$ (quando r è dispari), cioè in ogni caso in un intero di $K(j)$.

Perciò la f_n, moltiplicata per M_n, dà per prodotto un intero di $K(j)$ ed il numero

$$M_n \cdot \left(\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s f_n\left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right)\right)$$

è un intero di $K(j)$ non nullo per il modo con cui è stato scelto n. Si avrà quindi

$$\left|\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s f_n\left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right)\right| \geq \frac{1}{M_n}$$ e potremo quindi scrivere

$$\left|\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s e^{i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}}\right| \geq \frac{1}{M_n}\left\{1 - M_n \left|\sum_{s=1}^{6} \gamma_s \rho_n\left(i\sqrt{3}\frac{\eta_s}{t}\right)\right|\right\} \geq \frac{1}{M_n}\left\{1 - M_n(1) +\right.$$

$$\left. + o(1)) \cdot \Sigma \mid \gamma_s \mid \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1} \cdot (n+1)!}\right\} \geq \frac{1}{M_n}\left\{1 - [\Sigma \mid \gamma_s \mid + o(1)] \frac{3^{\frac{9}{2}}}{t(n+1)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{M_n}\left(1 - 0\left(\frac{1}{n}\right)\right) > 0$$

per n abbastanza grande. Da quest'ultima disuguaglianza segue immediatamente il nostro asserto.

In particolare nel caso in cui si abbia

$$\gamma_0 = c_0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = c_1, \quad \gamma_3 = \gamma_4 = c_2, \quad \gamma_5 = \gamma_6 = c_3,$$

dal teorema ora stabilito si deduce la disuguaglianza

$$c_0 + \cos \frac{\sqrt{3}}{2t}\left(c_1 e^{\frac{3}{2t}} + c_2 e^{-\frac{3}{2t}} + c_3\right) \neq 0.$$

Osservazione. – Con ragionamento analogo al precedente, anzi più di esso coerente allo schema di dimostrazione di G. Ricci, si può dimostrare il teorema

$$\gamma_0 + \sum_{s=1}^{6} \gamma_s e^{\frac{2\eta_s}{t}} \neq 0,$$

dove i simboli hanno il solito significato· Da questa proposizione scende ancora come corollario il teorema di Liouville, quando vi si assuma $t = 1$ e nulli tutti i coefficienti γ_s esclusi quei due che corrispondono ai valori 1 e -1 degli η_s.

È degno di nota inoltre il fatto che mentre il teorema di Liouville si può riguardare come corollario del teorema di Hermite, invece quello qui dimostrato, così come quello di G. Ricci, si possono far derivare soltanto dal teorema di Lindemann.