Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Merli

Su una formula di quadratura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 132–134.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_132_0>

Su una formula di quadratura.

Nota di LUIGI MERLI (a Firenze) (*)

Sunto. - *Si costruisce una formula di quadratura ottenuta per integrazione di una classe di polinomi di* G. GRÜNWALD.

Indichiamo con $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, n punti distinti dell'intervallo $(-1, 1)$ e siano $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \ldots, f(x_n^{(n)})$, i valori assunti in tali punti da una funzione $f(x)$, definita nello stesso intervallo, e consideriamo il polinomio di grado $\leq 2n - 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)2}(x), \tag{1}$$

con

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \qquad \omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x^{(n)}),$$

che assume rispettivamente nei punti $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ i valori

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

$f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \dots, f(x_n^{(n)})$. In una nota precedente ([1]), estendendo alcuni risultati di G. GRÜNWALD ([2]), abbiamo dimostrato che per qualsiasi funzione continua in $(-1, 1)$, si ha uniformemente

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - x_k^{(n)2}} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)2}(x) = \sqrt{1 - x^2} f(x), \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

nell'ipotesi che $x_1^{(n)}$ $x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ siano gli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Nella presente nota dimostreremo che *se* $f(x)$ *è una funzione continua in* $(-1, 1)$ *e* $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ *sono gli zeri del polinomio di* TCHEBYCHEFF *di prima specie, cioè per*

$$x_k^{(n)} = \cos(2k - 1)\frac{\pi}{2n}, \qquad (k = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots),$$

si ha:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \int_{-1}^{1} l_k^{(n)2}(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx. \tag{2}$$

A tale scopo ricordiamo che se $H_n(x)$ indica il polinomio di interpolazione di HERMITE di grado $\leq 2n - 1$ che nei punti $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ assume i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \dots, f(x_n^{(n)})$ e la cui derivata negli stessi punti è uguale a zero, si ha, per tutte le funzioni continue

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} H_n(x) dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx, \tag{3}$$

$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ essendo gli zeri del polinomio $T_n(x)$, ([3]).

Essendo

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \left[1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} (x - x_k^{(n)})\right] l_k^{(n)2}(x),$$

si ha

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \int_{-1}^{1} l_k^{(n)2}(x) dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} (x - x_k^{(n)}) l_k^{(n)2}(x) dx + \\ + \int_{-1}^{1} H_n(x) dx.$$

Tenuto conto della (3), nell'intento di dimostrare la (2), basterà quindi provare che

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} (x - x_k^{(n)}) l_k^{(n)2}(x) dx = 0. \tag{4}$$

([1]) L. MERLI, *Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*, « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei (Classe di Sc. fis.; mat. e nat.) »' serie VIII, vol. I, fasc. 11, pp. 1175-1180.

([2]) G. GRÜNWALD, *On the theory of interpolation*, « Acta Mathematica », 75 (1943), pp. 219-245.

([3]) E. FELDHEIM, *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, « Mém. Sciènces Math. », 45 (1939), Paris, p. 71.

Si ha, posto $|f(x)| \leq M$ in $-1 \leq x \leq 1$ ed $x = \cos\theta$.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} (x - x_k^{(n)})\, l_k^{(n)2}(x) dx \right| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \int_{-1}^{1} (x - x_k^{(n)})\, l_k^{(n)2}(x) dx \right| \leq$$

$$\leq M\pi \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sen}\theta \cos^2 n\theta}{n^2(\cos\theta - \cos\theta_k^{(n)})} \right| \leq \frac{M\pi}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\operatorname{sen} n(\theta - \theta_k^{(n)})}{\operatorname{sen}\dfrac{\theta - \theta_k^{(n)}}{2}} \right| < \frac{MC\pi \log n}{2n},$$

con C costante assoluta, indipendente da n ([4]). La (4) è così dimostrata e quindi la (2).

([4]) Cfr. per le notazioni e per i calcoli che qui si omettono, il num. 2 della nota ([1]).