PAOLO CATTANEO

Calcolo approssimato di π

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 148–149.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_148_0>

Calcolo approssimato di π.

Nota di PAOLO CATTANEO (a Padova).

Sunto - *Si dà di π un'espressione poco o non nota, che permette notevole rapidità e semplicità nel calcolo dei suoi valori approssimati.*

Dalla formula notissima $(1+x)^m = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_h \binom{m}{h} \cdot x^h$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \Sigma_h (-1)^h \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2h-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2h)} \cdot x\,.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_h \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2h-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2h)} \cdot z^{2h}.$$

$$\operatorname{arcsen} z = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = z + \sum_{1}^{\infty}{}_h \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2h-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2h)} \cdot \frac{z^{2h+1}}{2h+1}.$$

Ponendo in tale formula $z = \frac{1}{2}$ e ricordando che $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, si ha

$$\pi = 3 + \sum_{1}^{\infty}{}_h \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2h-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2h)} \cdot \frac{3}{(2h+1)\cdot 4^h}.$$

Dai primi tre termini si ha: $3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} = 3{,}1390625$;

i cinque termini successivi sono

$$\frac{15}{7168} = 0{,}00209263\ldots;$$

$$\frac{35}{24\cdot 64^2} = 0{,}00035603\ldots; \qquad \frac{189}{11\cdot 64^3} = 0{,}00006554\ldots;$$

$$\frac{693}{208\cdot 64^3} = 0{,}00001279\ldots; \qquad \frac{42{,}9}{64^4} = 0{,}00000255\ldots.$$

Addizionando, si ha

$$\pi > 3{,}14159204.$$

La somma di tutti i termini successivi è minore di

$$\frac{42{,}9}{64^4} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{42{,}9}{64^4} = 0{,}00000085\ldots;$$

sicchè, prendendo i valori eccessivi a meno di $1 : 100000000$

del IV°, V°, ... VIII° termine e della somma dei successivi, si ha

$$\pi < 3,14159209 + 0,00000086 = 3,14159295$$

e si può concludere che

$$\pi = 3,141592\ldots .$$

Aumentando il numero dei termini effettivamente calcolati, si hanno delle approssimazioni sempre maggiori, con assai maggiori rapidità e semplicità di quelle che si hanno con i metodi più noti (v. a pag. 272 la sempre utilissima *Analisi Algebrica* di E. CESARO, Torino, Bocca. 1894).