Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **2** (1947), n.2, p. 95–103.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1947_3_2_2_95_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1947.

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo.*

1. Le trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo sono state studiate in lavori recenti (1). Con la presente Nota intendo portare un primo contributo allo studio delle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia (O, O') di punti corrispondenti a Jacobiano nullo. Viene esaminato l'intorno del 2° ordine di (O, O') e gli enti geometrici che s'introducono porgono già, nella geometria metrica, riferimenti intrinseci nei due spazi.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) Si veda: E. BOMPIANI, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane*, « Memorie dell'Accademia d'Italia », vol. XIV, p. 11, 1943.

M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », s. 8ª, vol. II, p. 136, 1947.

E. BOMPIANI, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », s. 8ª, vol. II, p. 22, 1947.

M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, « Questo Bollettino », s. 3ª, vol. II, p. 3, 1947.

2. Il piano stazionario e la retta stazionaria.

Consideriamo fra due spazi ordinari $S_3(x, y, z)$ e $S_3'(x'. y', z')$ una trasformazione puntuale T

$$x' = f(x, y, z), \quad y' = \varphi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z)$$

e assumiamo i punti O, O' come origini delle coordinate in S_3, S_3'. Sviluppando le funzioni f. φ. ψ in serie di potenze nell'intorno di O, si ottiene

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z + [2] \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z + [2] \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z + [2] \end{aligned} \tag{2.1}$$

le a. b, c essendo costanti e indicando con [2] i termini di 2° grado e grado superiore. In questo numero esaminiamo l'intorno del 1° ordine di (O, O').

Essendo in (O, O') l'Jacobiano nullo, è

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (}^2\text{)},$$

da cui

(2.2) $\quad c_1 = \lambda a_1 + \mu b_1, \quad c_2 = \lambda a_2 + \mu b_2, \quad c_3 = \lambda a_3 + \mu b_3 \quad$ (λ e μ costanti).

Si ha:

Ad un piano della stella di centro O *(non passante per una certa retta che si dirà stazionaria) corrisponde in* T, *nell'intorno del 1° ordine di* (O, O'), *un piano fisso (che si dirà stazionario).*

Infatti ai piani della stella di centro O, non passanti per la retta (2.4), corrispondono superficie il cui piano tangente in O' è fisso ed ha l'equazione

$$z' = \lambda x' + \mu y'.$$

Assumendo questo piano stazionario come piano $z' = 0$ si ha $\lambda = \mu = 0$ e quindi per le (2.2)

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0. \tag{2.3}$$

Si ha pure:

Ai piani della stella di centro O' *(diversi dal piano stazionario) corrispondono in* T, *nell'intorno del 1° ordine di* (O, O'), *piani di un fascio (il cui asse si dirà retta stazionaria).*

(2) Suppongo che questo determinante sia di caratteristica 2 (per fissare le idee suppongo che fra i minori del 2° ordine estratti dalle due prime orizzontali uno sia $\neq 0$). Lascio ad altri di studiare i casi della caratteristica 1 e 0.

Infatti ai piani della stella di centro O' (diversi da $z'=0$), corrispondono superficie il cui piano tangente appartiene al fascio avente per asse la retta di equazioni

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Assumendo questa retta stazionaria come asse z si ha

$$a_3 = b_3 = 0. \tag{2.5}$$

Le (2.1), per le (2,3) e (2,5), divengono

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + [2] \\ y' &= b_1x + b_2y + [2] \\ z' &= [2] \end{aligned}$$

dove il determinante $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, essendo l'Jacobiano di caratteristica 2.

E ancora:

Nell'intorno del 1º ordine di (O, O'). *ad un piano generico del fascio, avente per asse una retta* r' *per* O' *e appartenente al piano stazionario, corrisponde un piano* α *fisso per la retta stazionaria; le rette* r'(y' = k'x') *del fascio di centro* O' *appartenente al piano stazionario* (z' = 0) *e i piani* α *del fascio* (y = kx) *avente per asse la retta stazionaria si corrispondono in una proiettività* ω *di equazione*

$$k' = \frac{b_1 + b_2k}{a_1 + a_2k}.$$

Da quanto precede, si trae che *agli* E_1 *per* O *corrispondono* E_1' *per* O' *appartenenti al piano stazionario; ad ogni* E_1 *per* O *appartenente ad un piano* α *per la retta stazionaria (diverso dall'* E_1 *appartenente alla retta stazionaria :* E_1 *stazionario) corrisponde l'* E_1' *per* O' *appartenente alla retta del piano stazionario corrispondente ad* α *in* ω*; al punto infinitamente vicino ad* O *sulla retta stazionaria corrisponde il punto* O'*; ad ogni* E_1' *per* O' *(non appartenente al piano stazionario) corrisponde l'* E_1 *stazionario.*

3. La direzione cuspidale.

Passiamo ad esaminare l'intorno del 2º ordine di (O, O'). Scriviamo le equazioni di T così

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\ y' &= b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\ z' &= c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3] \end{aligned} \tag{3.1}$$

le a, b, c essendo costanti e indicando con [3] i termini di 3° grado e grado superiore.

Si ha:

All' E_2 *di flesso di centro* O *ed appartenente alla retta stazionaria corrisponde in* T *un elemento cuspidale di centro* O′ *la cui tangente è*

$$\frac{x'}{a_{33}} = \frac{y'}{b_{33}} = \frac{z'}{c_{33}}. \tag{3.2}$$

Infatti all'E_2 di flesso $x = y = 0$ corrisponde l'elemento cuspidale

$$\begin{aligned} x' &= a_{33}z^2 \\ y' &= b_{33}z^2 \\ z' &= c_{33}z^2 \end{aligned}$$

la cui tangente è appunto la (3.2).

La (3.2) si dirà *direzione cuspidale.* Assumendo in S_3' questa retta come asse z' (³) si ha

$$a_{33} = b_{33} = 0. \tag{3.3}$$

4. Il piano Jacobiano e il cono principale.

In S_3 il piano tangente in O alla superficie Jacobiana

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

essendo $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, ha l'equazione

$$c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z = 0.$$

Assumendo questo piano *(piano Jacobiano)* come piano $z = 0$ (⁴) si ha

$$c_{13} = c_{23} = 0. \tag{4.1}$$

Al piano stazionario $z' = 0$ di S_3' corrisponde in S_3, per le (3.1) e (4.1), la superficie

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + [3] = 0$$

(³) Consideriamo qui il caso generale nel quale la direzione cuspidale non appartiene al piano stazionario (supponiamo cioè $c_{33} \neq 0$).

(⁴) Essendo $c_{33} \neq 0$ la Jacobiana ha in 0 punto semplice e il suo piano tangente non passa per la retta stazionaria $x = y = 0$; è quindi lecito assumere tale piano come piano $z = 0$.

la quale ha in O punto doppio e il cono (quadrico) tangente in O ad essa ha l'equazione

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 = 0.$$

Questo cono si dirà *cono principale*. Esso interseca il piano Jacobiano $z = 0$ nella coppia di rette *(generatrici principali)*

$$z = 0, \quad c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 = 0.$$

Assumendo queste rette come assi x e y (5) si ha

$$c_{11} = c_{22} = 0. \tag{4.2}$$

Notiamo la proprietà:

Il piano Jacobiano è il piano polare della retta stazionaria rispetto al cono principale.

5. Le direzioni principali.

Nella proiettività ω (n. 2) ai piani $x = 0$ e $y = 0$ corrispondono rispettivamente le rette

$$x' = \frac{a_2}{b_2}y', \; z' = 0 \quad \text{e} \quad y' = \frac{b_1}{a_1}x', \; z' = 0.$$

Assumendo in S_3' queste rette *(direzioni principali)* risp. come assi y' e x' si ha

$$a_2 = b_1 = 0. \tag{5.1}$$

6. Riferimento metrico intrinseco.

Le due terne di assi x, y, z e x', y', z' sono così intrinsecamente fissate. Nella geometria metrica gli elementi geometrici precedentemente considerati porgono quindi riferimenti intrinseci (6). Le equazioni di T, per le (3.1), (3.3), (4.1), (4.2), (5.1), e posto $a_1 = a$, $b_2 = b$, acquistano quindi la forma *(canonica)*

$$\begin{aligned}
x' &= ax + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\
y' &= by + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\
z' &= \qquad\qquad c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + [3]
\end{aligned}$$

dove i coefficienti sono ovviamente invarianti metrici di T (7).

(5) Supponiamo qui le due rette distinte (ossia $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \neq 0$).

(6) Giovandosi degli elementi geometrici introdotti, si possono ottenere anche in altro modo riferimenti intrinseci metrici (ad es. si possono prendere riferimenti ortogonali). Ma la scelta degli assi coordinati fatta nella presente Nota è conveniente essendo intrinseca anche nella geometria proiettiva.

(7) Fra gli invarianti metrici di T vi sono gli angoli formati fra loro dagli assi coordinati nei due spazi.

7. La retta asintotica.

Consideriamo le calotte (del 2° ordine) C_2, $\bar{C}_2$ corrispondenti risp. ai piani $x'=0$, $y'=0$. Le loro equazioni sono risp.

$$x = -\frac{a_{22}}{a}y^2 - 2\frac{a_{23}}{a}yz, \quad y = -\frac{b_{11}}{b}x^2 - 2\frac{b_{13}}{b}xz \text{ (}^8\text{)}.$$

Le direzioni asintotiche di queste due calotte sono la direzione stazionaria $x=y=0$ e inoltre risp. le direzioni

(7.1) $$x=0, \quad a_{22}y + 2a_{23}z = 0,$$

(7.2) $$y=0, \quad b_{11}x + 2b_{13}z = 0.$$

. Il piano individuato dalla (7.1) e dall'asse x e il piano individuato dalla (7.2) e dall'asse y s'intersecano nella retta (che si dirà *retta asintotica*) di equazione

$$a_{22}y + 2a_{23}z = 0,$$
$$b_{11}x + 2b_{13}z = 0.$$

Questa retta non appartiene in generale ai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$ e quindi si può, nella geometria proiettiva, assumere come retta $x=y=z$. cioè scegliere il punto unità su di essa, il che implica

$$a_{22} = -2a_{23}, \quad b_{11} = -2b_{13}.$$

Il piano per la $x=y=z$ e per la $x=y=0$ è $x=y$; a questo piano corrisponde in ω (n. 2) la retta

$$z'=0, \quad bx' - ay' = 0.$$

Nella geometria proiettiva, essendo $a \neq 0$, $b \neq 0$, si può assumere questa retta come $x'=y'$, il che implica $a=b$.

8. Due invarianti proiettivi.

Nella stella di centro O è ormai fissato intrinsecamente il riferimento proiettivo e siccome, in tale riferimento, il cono principale (n. 4) ha l'equazione

(8.1) $$2c_{12}xy + c_{33}z^2 = 0$$

è evidente che $\dfrac{c_{12}}{c_{33}}$ è un *invariante proiettivo* della trasformazione data in (O, O').

Il significato geometrico di questo invariante si può ottenere ad es. considerando il piano polare della retta asintotica $x=y=z$, rispetto al cono principale (8.1),

$$c_{12}(x+y) + c_{33}z = 0,$$

(^{8}) La calotta C_2 corrisponde non soltanto al piano $x'=0$ ma a tutte le calotte tangenti in O' a $x'=0$ e aventi ivi la direzione principale $x'=z'=0$ come direzione asintotica. E analog. per $\bar{C}_2$.

e la retta intersezione di questo piano col piano $y = 0$

8.2) $$c_{12}x + c_{33}z = 0.$$

Nel piano $y = 0$, le quattro rette per O: (8.2), $x = z$ [9], $z = 0$, $x = 0$ formano in quest'ordine un birapporto che vale, appunto $-\frac{c_{12}}{c_{33}}$.

Un altro invariante proiettivo della trasformazione è $\frac{a_{23}}{b_{13}}$.

Consideriamo infatti nel piano $z' = 0$, l'E_1' di centro O' e appartenente alla retta $x' = z'$ (di cui si è detto alla fine del n. 7) e i due E_2' corrispondenti agli E_2 di flesso $y = z = 0$ e $x = z = 0$, di equazioni $x' = ax + a_{11}x^2$, $y' = b_{11}x^2$; $x' = a_{22}y^2$, $y' = by + b_{22}y^2$. Questi due E_2' e l'E_1' determinano [10] un invariante proiettivo finito che vale appunto $\frac{a_{23}}{b_{13}}$ [11].

9. Sulle calotte (del 2° ordine) corrispondenti in *T*.

Si ha:

Le calotte del 2° ordine di S_3 *di centro* O *e aventi ivi lo stesso piano tangente (non passante per la retta stazionaria)* [12] *sono trasformate da* T *in una stessa calotta (tangente al piano stazionario).*

Infatti alla calotta

$$z = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2$$

corrisponde in T la calotta C_2'

(9.1) $$z' = c_{33}(\alpha_1 x' + \alpha_2 y')^2 + 2c_{12}x'y'$$

nella quale non figurano α_{11}, α_{12}, α_{22}.

(9) La retta $x = z$ si ottiene segando $y = 0$ col piano delle rette $x = y = z$ e $x = y = 0$.

(10) In un piano due E_2 con tangenti distinte e un E_1 uscente dai loro centro comune O determinano un invariante proiettivo finito, dato da

$$\frac{|\,xx'x''\,| \cdot |\,x\bar{x}'z\,|^3}{|\,x\bar{x}'\bar{x}''\,| \cdot |\,xx'z\,|^3}$$

dove le x sono le coordinate (proiettive omogenee) di O, le z sono le coordinate di un punto qualunque della retta contenente l'E_1, mentre x', x'', $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ sono risp. le coordinate dei punti derivati primi e secondi in O dei due E_2. Si veda: E. Bompiani, *Alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale*, « Rend. del Sem. Mat. di Milano », vol. 10, p. 9, 1936.

(11) L'invariante $\frac{a_{23}}{b_{13}}$ è anche determinato dai due E_2, in cui le calotte C_2, $\bar{C}_2$ (n. 8) sono intersecate dal piano Jacobiano $z = 0$, e dall'E_1 di centro O appartenente alla retta $x = y$, $z = 0$.

(12) Ai piani passanti per la retta stazionaria corrispondono superficie aventi in O' punto doppio.

Segue che per ogni piano π della stella O (non passante per la retta stazionaria) si ha una calotta C_2'.

Orbene:

Le direzioni asintotiche della calotta C_2' *sono le corrispondenti nella proiettività* ω *dei due piani che proiettano dalla retta stazionaria le rette in cui il cono principale è intersecato dal piano* π.

Infatti il piano π, di equazione $z = \alpha_1 x + \alpha_2 y$, sega il cono principale $c_{33}z^2 + 2c_{12}xy = 0$ nelle due rette rappresentate complessivamente dalle equazioni

$$z = \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad c_{33}(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2 + 2c_{12}xy = 0.$$

Queste due rette sono proiettate dalla retta stazionaria (asse z) nella coppia di piani

$$c_{33}(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2 + 2c_{12}xy = 0$$

ai quali corrispondono nella proiettività ω (n. 2) $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$, $z' = 0$ le due rette rappresentate complessivamente dalle equazioni

$$z' = 0, \quad c_{33}(\alpha_1 x' + \alpha_2 y')^2 + 2c_{12}x'y' = 0$$

che sono appunto le direzioni asintotiche della calotta (9.1).

Segue che:

Facendo corrispondere ai piani della stella di centro O *(non passanti per la retta stazionaria) le direzioni asintotiche della corrispondente calotta* C_2' *nasce fra quei piani e le coppie di rette per* O'*. appartenenti al piano stazionario, una corrispondenza* γ (1.4).

Infatti. mentre un piano π della stella O (non passante per la retta stazionaria) determina la corrispondente coppia di rette per O' appartenenti al piano stazionario, inversamente, data su questo piano una coppia di rette per O' vengono determinate in S_3. due piani, per la retta stazionaria, ad esse corrispondenti in ω. i quali segano il cono principale in quattro rette che determinano quattro piani π.

Segue pure:

Affinchè una calotta C_2' *sia parabolica, occorre e basta che il piano corrispondente* π *sia tangente al cono principale.*

Infatti se π è tangente al cono principale (cioè sono coincidenti le due rette in cui π sega tale cono) coincidono i due piani che proiettano queste rette dalla retta stazionaria e quindi coincidono pure le due rette asintotiche corrispondenti in ω; la calotta è parabolica. Inversamente, data nel piano stazionario una coppia di rette per O' coincidenti, risultano coincidenti i piani che le corrispondono in ω e quindi le intersezioni di questi piani col cono principale si riducono a due rette doppie: dei quattro piani determinati da queste rette, due sono tangenti al cono principale, mentre gli altri due coincidono e passano per la retta stazionaria e quindi debbono essere scartati [13].

Notiamo ancora:

Le direzioni principali costituiscono l'unica coppia di rette distinte per cui i quattro piani corrispondenti in γ coincidono.

Infatti perchè ciò avvenga i due piani per la retta stazionaria corrispondenti in ω alle due direzioni devono essere tangenti al cono principale, sicchè le generatrici di contatto devono essere le generatrici principali (n. 4) e quindi le due direzioni quelle principali (n. 5) [14].

Il piano corrispondente in γ alla coppia delle direzioni principali è il piano Jacobiano (nn. 4, 5). La calotta corrispondente in T al piano Jacobiano appare così particolarmente interessante [15].

[13] La corrispondenza, subordinata da γ, fra i piani tangenti al cono principale e le coppie di rette coincidenti, è quindi (1, 2), *non* (1, 4), d'accordo col fatto che noi scartiamo i piani per la retta stazionaria i quali porterebbero in S_3' a coppie di rette coincidenti.

[14] Le coppie di rette per O', appartenenti al piano stazionario, costituite da una retta principale d e da un'altra retta ($\neq d$), ed esse soltanto, sono tali che dei quattro piani corrispondenti in γ, due soli sono distinti. Le due coppie costituite da una retta principale contata due volte sono eccezionali in quanto ad esse non corrisponde in γ nessun piano (avendo scartato quelli passanti per la retta stazionaria).

[15] Si può verificare che *le calotte del 3° ordine di centro* O *e tangenti ivi al piano Jacobiano sono trasformate da* T *in una stessa calotta.*