
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * Francesco Severi, Funzioni quasi abeliane, Pontificia Academia Scientiarum Scripta Varia, Roma, 1947 (F. Conforto)
- * Fabio Conforto, Funzioni abeliane e matrici di Riemann (Parte prima), Corsi del Reale Istituto di Alta Matematica, Roma, 1942 (L. Berzolari)
- * Beppo Levi, Leyendo a Euclides, Editorial, Rosario, 1947 (B. Segre)
- * Gino Loria, Guida allo studio della storia delle matematiche, II edizione, Hoepli, Milano (M. Villa)
- * L. Geymonat, Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale, Levrotto e Bella, Torino, 1947 (F. Carruccio)
- * T. M. MacRobert, Functions of a complex variable, third edition, Macmillan and co., London, 1947 (G. Sansone)
- * W. V. D. Hodge, D. Pedoe, Methods of algebraic Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1947 (B. Segre)
- * Bericht über die Mathematische Tagung in Tübingen, Tubinga, 1946 (F. Conforto)
- * N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Herman & C.ie, Paris, 1947 (F. Calabi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.2, p. 168–181.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_168_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

FRANCESCO SEVERI, *Funzioni quasi abeliane* (Pontificia Academia Scientiarum Scripta Varia, n. 4, Roma, 1947).

Il presente scritto, che, nonostante la sua mole di oltre 300 pagine, non è un trattato, ma una memoria accademica originale, esaurisce il quadro delle funzioni (analitiche) uniformi di π (≥ 1) variabili (complesse), che ammettono un teorema di addizione nel senso di WEIERSTRASS, risultando di conseguenza meromorfe (al finito) e dotate di $\mu \leq 2\pi$ (vettori-) periodi indipendenti. Se $\mu = 2\pi$, tali funzioni si identificano con le *funzioni abeliane* di π variabili (per le quali il teorema di addizione, ammesso il meromorfismo delle funzioni in oggetto, è soddisfatto in conseguenza dell'esistenza dei 2π periodi indipendenti). Poichè le funzioni studiate posson tutte considerarsi come limiti di funzioni abeliane quando tendano all'infinito taluni periodi, l'A. le chiama *funzioni quasi abeliane*. Le funzioni con $\mu > 2\pi$ periodi si riducono poi, come è noto, a quelle con $\mu \leq 2\pi$ periodi.

Prima di passare ad un esame dettagliato, conviene esporre talune considerazioni generali, in relazione alle quali la memoria in questione presenta un non comune interesse.

Per ragioni che non è qui il caso di indagare, ma che potrebbero forse costituire utile oggetto di riflessione da parte di uno storico della matematica, le memorie di ampia mole, tendenti a sviscerare sotto i più varî aspetti un determinato argomento, accompagnando la profondità del pensiero scientifico con una perfezione anche letteraria della forma, divengono sempre più rare nella produzione matematica mondiale: all'incalzare della vita moderna sembra adattarsi di più la rapida successione delle note accademiche, troppo spesso di carattere riassuntivo od episodico, che la completa ed armonica esposizione di un forte complesso di idee, lungamente e cautamente maturate. Chi ora vorrà approfondire la lettura della memoria di SEVERI, non mancherà di rilevare, accanto alla profondità delle idee, alla larghezza di vedute, alla varietà delle nozioni adoperate ed alla maestria della tecnica, messe in opera durante la ricerca, la completezza di tutti i particolari, l'accuratezza dell'informazione bibliografica, l'insolita ampiezza dell'introduzione, nella quale con somma chiarezza vengono precisati i precedenti, i risultati ed i limiti della ricerca, a cui è dedicata la memoria; e quando avrà rilevato tutto ciò non potrà far a meno di accostare il presente lavoro ai grandi modelli dei classici della matematica.

In secondo luogo, giova notare che la ricerca di SEVERI si svolge in quella zona intermedia tra l'analisi e la geometria algebrica, nella quale si intrecciano la classica teoria delle funzioni abeliane con la profonda teoria delle varietà algebriche irregolari. È in questa zona, illustrata da memorabili ricerche di Pi-

CARD, POINCARÉ WIRTINGER, PAINLEVÉ, HUMBERT, CASTELNUOVO, ENRIQUES-SEVERI, BAGNERA - DE FRANCHIS, LEFSCHETZ, SCORZA, che ognora si sono rivelati i più riposti e mirabili legami tra i più elevati problemi dell'analisi e della geometria. Alla serie delle classiche memorie sull'argomento, dovute ai matematici ora ricordati, l'ultima memoria di SEVERI aggiunge un elemento allo stesso livello di quelli più importanti fra i precedenti.

La memoria si divide in quattro parti, delle quali le prime due (sino a pag. 124) dedicate alle funzioni quasi abeliane speciali, la terza (sino a pag. 274) alle funzioni quasi abeliane generali e l'ultima allo sviluppo dell'interessante caso particolare delle funzioni quasi abeliane di due variabili.

Per capire le denominazioni ora introdotte, giova ricordare come le curve algebriche di genere π diano luogo, attraverso il problema d'inversione, a funzioni abeliane di π variabili, le quali non sono tuttavia le più generali tra tali funzioni, onde esse, con POINCARÉ, si chiamano funzioni abeliane *speciali*. Storicamente la teoria generale delle funzioni abeliane è sgorgata dalla teoria delle funzioni abeliane speciali. L'A. si è perciò proposto di seguire in rapporto alle funzioni quasi abeliane la linea dello sviluppo storico delle funzioni abeliane. All'uopo, anziché partire da una curva di genere *effettivo* π , egli è partito da una curva C di genere *virtuale* π e di genere *effettivo* p , sulla quale siano fissate δ_1 coppie di punti distinti e δ_2 coppie di punti coincidenti, per modo che sia $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$. L'insieme delle serie lineari sopra una tal curva C , le quali possiedano le nominate coppie come coppie *neutre*, costituisce un *campo neutro* sulla C , la quale può concepirsi come limite di una curva di genere effettivo π e si può materializzare con una curva piana, su cui le δ_1 coppie di punti distinti siano rappresentate da nodi e le δ_2 coppie di punti coincidenti da cuspidi.

Ciò posto, l'A., raccogliendo in un tutto organico ed essenzialmente completando talune osservazioni e taluni risultati dovuti a vari autori (LINDEMANN, NOETHER, SEVERI, ENRIQUES, GAMBIER, KLEIN, HUMBERT, CLEBSCH, GORDAN, ELLIOT, APPELL, GOURSAT), sviluppa una completa geometria, relativa ad una curva su cui sia fissato un campo neutro, sia dal punto di vista algebrico-geometrico che dal punto di vista trascendente. Si palesano così analogie e differenze rispetto al caso classico. Il teorema di esistenza e di unicità della serie lineare neutra completa, individuata da un gruppo G di punti di C , vale ad es soltanto con opportune limitazioni. Profondamente indagato viene, in rapporto ad un campo neutro, il problema delle serie speciali neutre: tra l'altro è dimostrata l'esistenza di una e di una sola serie lineare neutra $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$: *serie canonica neutra*; viene inoltre generalizzato convenientemente il teorema di Riemann-Roch. La trattazione culmina nello studio della *varietà di Jacobi* V_π (varietà delle g_π neutre sulla C). Come nel caso classico, la V_π possiede un gruppo abeliano ∞^π di trasformazioni birazionali in sè. Tale gruppo è però soltanto *generalmente* (e non assolutamente) transitivo, in quanto le $\delta = \delta_1 + \delta_2$ coppie neutre sulla C implicano l'esistenza su V_π di 2δ varietà a $\pi - 1$ dimensioni, invarianti per le trasformazioni del gruppo. Piena luce sulla struttura geometrica della V_π viene infine portata dal teorema, secondo il quale la V_π è il prodotto della varietà di Jacobi inerente alla curva C , concepita come curva di genere p , per uno spazio lineare a δ dimensioni.

A questo punto, la trattazione passa dal campo algebrico-geometrico a quello trascendente. Considerando sistematicamente la curva C di genere virtuale π come limite di una curva di genere effettivo π , s'introducono sulla C π integrali abe-

liani virtualmente di prima specie indipendenti nel campo neutro; p di questi possono essere dati dagli integrali abeliani normali di prima specie della C , δ_1 da integrali normali di terza specie aventi ognuno una coppia di singolarità logaritmiche pure nei punti di una delle δ_1 coppie neutre a punti distinti, δ_2 da integrali normali di seconda specie, aventi ognuno un polo del primo ordine in uno dei punti delle δ_2 coppie neutre a punti coincidenti. Dopo ciò si può generalizzare al caso del campo neutro il teorema d'Abel ed il problema d'inversione. Le somme degli integrali virtualmente di prima specie nei gruppi di π punti sulla C divengono allora π integrali di differenziale totale sulla varietà di Jacobi V_π ; detti u_1, u_2, \dots, u_π tali integrali, il problema di inversione generalizzato conduce a considerare il punto mobile su V_π ed in generale ogni funzione razionale sulla V_π come funzione quasi abeliana di u_1, u_2, \dots, u_π con $2p + \delta_1$ periodi. Se gli integrali u_1, u_2, \dots, u_π sulla V_π sono costruiti a partire dagli integrali tipici sulla C dianzi indicati, la matrice dei periodi delle funzioni quasi abeliane assume la forma particolare ma non restrittiva:

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{ccc} A & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega_1 & B \\ 0 & \Omega_2 & 0 \end{array} \right\|$$

ove le prime due colonne simbolizzano ciascuna p verticali, l'ultima δ_1 verticali; mentre la prima riga simbolizza p orizzontali, la seconda δ_1 e la terza δ_2 . Inoltre A e B sono matrici quadrate ad elementi tutti nulli, tranne quelli che stanno sulla diagonale principale, che sono uguali a $2\pi i$; e la matrice:

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cc} A & \Omega \end{array} \right\|$$

è una matrice abeliana.

La fine della parte prima e la breve parte seconda sono dedicate alle delicate questioni poste dai rapporti tra gli integrali u_1, u_2, \dots, u_π sulla V_π e le varietà invarianti per il gruppo delle trasformazioni della V_π in sè; nonchè alla dimostrazione delle principali proprietà qualitative delle funzioni quasi abeliane ottenute.

Nella terza parte della memoria, i risultati ottenuti nel campo delle funzioni quasi abeliane speciali forniscono il necessario materiale d'orientamento per costruire la teoria delle funzioni quali abeliane *generali*. A tale proposito l'A. osserva che tre tipi di corpi si possono opportunamente studiare per abordare lo studio generale delle funzioni quasi abeliane:

a) i corpi costituiti da tutte le funzioni di π variabili meromorfe (al finito) con una tabella dei periodi riconducibile alla forma (1), dove però la matrice (2) sia una *qualunque* matrice di Riemann normale (nella quale dunque negli elementi della diagonale principale della A compaiono eventualmente anche i divisori elementari);

b) i corpi costituiti dalle funzioni razionali sopra una V_π algebrica possedente un gruppo $\infty\pi$ generalmente transitivo di trasformazioni birazionali in sè,

c) i corpi costituiti dalle funzioni razionali sopra una V_π prodotto di una V_p di Picard per uno spazio lineare S_δ con $p + \delta = \pi$.

Con una lunga e delicata analisi, nel corso della quale risulta necessario approfondire talune proprietà generali della base sopra una varietà algebrica, nonchè lo studio delle varietà singolari e di indeterminazione degli integrali semplici relativi ad una V_π , l'A. riesce in sostanza a dimostrare l'equivalenza delle tre definizioni a), b), c), ammettendo tuttavia un'ipotesi a priori limitativa,

indicata come « ipotesi L ». Le indagini intorno al valore di tale ipotesi andrebbero ancora proseguite; ma è ben probabile che l'ipotesi possa venir sostanzialmente rimossa.

Tenuta presente la definizione *b*), risulta che un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili deriva dall'associazione di una V_π con un gruppo abeliano Γ , generalmente transitivo, di trasformazioni birazionali della V_π in sè. Tale osservazione è molto importante, perché sopra una V_π possono esistere più gruppi del tipo di Γ , i quali tuttavia possono dar luogo a corpi distinti o anche coincidenti di funzioni quasi abeliane; quest'ultima eventualità (che secondo l'Autore è forse l'unica) si verifica però allora ed allora soltanto che esista una trasformazione birazionale della V_π in sè, la quale muti l'uno nell'altro i due gruppi considerati. Le proprietà ora dette vengono usate per il computo del numero dei moduli, da cui dipendono i corpi di funzioni abeliane.

Dopo ciò, si perviene ai punti più elevati dell'intera trattazione con il *teorema di struttura* ed i *teoremi di esistenza*. Il teorema di struttura insegna ad esprimere ogni funzione di un corpo di funzioni quasi abeliane a mezzo di funzioni razionali, esponenziali e funzioni intermedie o trascendenti ad esse collegate. La dimostrazione di tale teorema richiede talune importanti estensioni di proprietà classiche degli integrali ellittici agli integrali semplici di seconda e di terza specie sopra una varietà, le quali hanno valore generale anche a prescindere della teoria delle funzioni quasi abeliane. Dei tre teoremi di esistenza assegnati dall'A., il più significativo è indubbiamente il terzo, la cui dimostrazione è la più elaborata e richiede il maggior numero di premesse. Tale teorema afferma in sostanza che le condizioni necessarie e sufficienti perché esista un corpo di funzioni quasi abeliane con una matrice dei periodi del tipo (1) si riducono alle sole condizioni caratteristiche perché la matrice $\| A \ Q \|$ sia una matrice di Riemann normale, le matrici Ω_1 ed Ω_2 rimanendo invece assolutamente qualsiasi. La dimostrazione di tale teorema è indipendente dall'ipotesi *L*; il teorema è però valido per i corpi di funzioni quasi abeliane, la cui matrice dei periodi si può portare alla forma (1). Dimostrare a priori che la tabella dei periodi di ogni corpo di funzioni quasi abeliane è riconducibile alla forma (1) equivarrebbe a rimuovere l'ipotesi *L*.

La parte quarta della memoria tratta delle funzioni quasi abeliane di due variabili. Per un corpo di tali funzioni, l'A. studia a fondo la superficie, che corrisponde alla superficie di Kummer nel caso abeliano, e può considerarsi come limite di questa. Naturalmente si trovano superficie diverse a seconda delle varie possibilità per ϕ , δ_1 e δ_2 . Si tratta tuttavia sempre di casi interessanti e riposti. Tra i possibili casi limiti della superficie di Kummer si trova ad es. una superficie del quarto ordine con retta doppia e dotata di otto punti doppi conici fuori della retta doppia, già rilevata da PLUECKER in questioni di geometria della retta. Questo solo esempio può far intravedere quale messe di risultati anche nel campo geometrico sia da aspettarsi dall'ulteriore sviluppo della teoria delle funzioni quasi abeliane.

In quanto precede si è soltanto accennato per sommi capi ai principali risultati della memoria. Si può ben dire che, con questa memoria, SEVERI ha creato un'intera nuova teoria, la quale, seppure possa apparire soltanto come un ramo rigoglioso del tronco perennemente vitale della teoria delle funzioni abeliane, presenta tuttavia proprie caratteristiche ben individuate. La forza di penetrazione e la varietà delle risorse messe in opera durante la ricerca sono in tutto degne delle altissime ed ovunque riconosciute qualità, che pongono l'A. tra i maggiori maestri della scienza matematica.

Per concludere gioverà dire che la ricerca di SEVERI porta la teoria delle funzioni quasi abeliane ad un punto che è paragonabile a quello, in cui la teoria delle funzioni abeliane si trovava dopo le ricerche di PICARD, POINCARÉ e WIRTINGER. È dunque legittimo aspettarsi, che, sul fondamento della memoria di SEVERI, la nuova teoria possa ulteriormente progredire, sul modello del caso abeliano. Come accenna lo stesso A. in vari punti della memoria, molte questioni rimangono ancora aperte nella teoria anche nel campo funzionale; è non è escluso che in futuro si possa dare all'intera teoria sotto l'aspetto funzionale una sistemazione più omogenea e più snella. Ma al di là dell'aspetto funzionale, la teoria presenta indubbiamente aspetti geometrici, topologici ed aritmetici, da collegare con le classiche ricerche di ENRIQUES-SEVERI, BAGNERA-DE FRANCHIS, LEFSCHETZ e SCORZA nel caso abeliano. Un suggestivo campo di studi di vastità praticamente infinita, viene così ad offrirsi ai ricercatori.

F. CONFORTO

FABIO CONFORTO. *Funzioni abeliane e matrici di Riemann.* (Parte prima); Corsi del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1942 (pag. 304).

Questo libro, che riproduce le lezioni tenute nel 1941 dal prof. CONFORTO all'Istituto Nazionale di Alta Matematica (del quale sono note le grandi benemeritenze verso la nostra scienza), non ebbe finora la meritata diffusione, sia perchè uscì in pieno periodo di guerra, sia perchè vide la luce in poche centinaia di copie litografate.

La presente recensione è la prima che ne viene fatta, è confidiamo che valga a maggiormente richiamare sul libro l'attenzione di analisti e di geometri, i quali senza dubbio si compiaceranno di constatare come l'opera del prof. CONFORTO segni un notevole progresso rispetto alle trattazioni classiche dell'argomento.

Una prima parte del volume (fino alla pag. 194) sviluppa in modo autonomo, come mostreremo, la teoria delle funzioni abeliane; la parte ulteriore stabilisce gli opportuni collegamenti con la geometria algebrica.

Le preesistenti trattazioni della teoria delle funzioni abeliane prendevano le mosse dallo studio degli integrali abeliani sopra una curva algebrica irriducibile di genere $p (\geq 1)$, pervenendo successivamente al problema d'inversione posto da JACOBI nel 1829, oppure dall'estensione a priori a p qualunque delle serie Θ .

La prima via conduce bensì a funzioni meromorfe (sottinteso « al finito », perchè all'infinito si hanno singolarità essenziali) di p variabili con $2p$ periodi indipendenti, e, con RIEMANN e WEIERSTRASS, alle serie Θ di p variabili, estendendo le Θ date da JACOBI per $p = 1$, ma le funzioni che così si ottengono sono *speciali*, secondo la denominazione del POINCARÉ, ossia sono vincolate ai moduli della curva e non libere di avere i periodi più generali compatibili con la convergenza della serie Θ .

La seconda via è quella seguita da A. KRAZER nel classico *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig 1903), nel quale si parte immediatamente dalla considerazione delle funzioni abeliane più generali. Ma la trattazione del KRAZER, che prosegue gli inizi di RIEMANN e di WEIERSTRASS, riduce lo studio di quelle funzioni a quello di opportuni quozienti di serie Θ , imitando dunque il pro-

cesso storico di costruzione della teoria delle funzioni speciali, senza che l'introduzione delle serie Θ appaia giustificata da nessuna necessità a priori.

Altri progressi della teoria, sempre in questo indirizzo, apportarono WIRTINGER, KLEIN, PICARD, PAINLEVÉ, HUMBERT, ENRIQUES-SEVERI, BAGNERA - DE FRANCHIS, CASTELNUOVO, LEFSCHETZ e sopra tutto, per ciò che riguarda specialmente le matrici di RIEMANN, strettamente collegate alle proprietà generali delle funzioni abeliane, GAETANO SCORZA.

Si era tuttavia già ravvisata da tempo la necessità di una trattazione più naturale e sistematica. Di ciò si era reso interprete il LEFSCHETZ in un rapporto del 1928; ed un principio di realizzazione per $p = 2$ era contenuto in un lavoro di APPELL del 1891. Spetta al CONFORTO il notevole merito di aver condotto a compimento, come meglio non si sarebbe potuto, il desiderato programma con l'estensione a p qualunque del teorema principale di APPELL e con l'intima fusione di quest'ordine di ricerche con precedenti classici risultati del FROBENIUS (1884) sulle relazioni di eguaglianza e di diseguaglianza fra i periodi, necessarie e sufficienti per assicurare l'esistenza delle funzioni abeliane con prefissati periodi.

Con riferimento alle funzioni abeliane più generali, una funzione $f(u_1, \dots, u_p)$, analitica, uniforme delle p (≥ 1) variabili complesse indipendenti u_1, \dots, u_p viene detta una *funzione abeliana* quando soddisfa alle tre condizioni:

1) è *periodica* ed ammette $2p$ periodi (vettori) indipendenti. Un sistema di p costanti $\omega_1, \dots, \omega_p$ non tutte nulle si dice un *periodo* per la $f(u_1, \dots, u_p)$ se

$$f(u_1 + \omega_1, \dots, u_p + \omega_p) = f(u_1, \dots, u_p).$$

Più periodi diconsi poi *dipendenti* se è nulla una loro combinazione lineare, a coefficienti interi non tutti nulli, *indipendenti* nel caso contrario;

2) dipende effettivamente dalle p variabili u_1, \dots, u_p (e non da $q < p$ combinazioni lineari delle variabili);

3) è *meromorfa*, cioè per valori finiti delle variabili possiede soltanto singolarità inessenziali, ossia singolarità polari e punti d'indeterminazione.

Quando per una funzione analitica, uniforme, periodica delle p variabili complesse u_1, \dots, u_p sia soddisfatta la condizione 2), suppongasi che essa ammetta n (≥ 1) periodi indipendenti. Si potranno allora comporre infinite n -ple di periodi indipendenti, e se tra esse ne esisterà qualcuna tale che ogni periodo della f si possa ottenere dai periodi della n -pla mediante una combinazione lineare a coefficienti interi non tutti nulli, la n -pla si dirà costituire un *sistema primitivo di periodi*.

Ciò posto, la nuova trattazione si inizia osservando che, in virtù di un teorema di P. COUSIN (1895) (già dimostrato per $p = 1$ dal WEIERSSTRASS e per $p = 2$ dal POINCARÉ nel 1883), ogni funzione abeliana $f(u) = f(u_1, \dots, u_p)$, in quanto meromorfa, può esprimersi come quoziente di due trascendenti intere $\varphi(u)$ e $\psi(u)$ che si annullano contemporaneamente soltanto nei punti di indeterminazione della $f(u)$, e nel dimostrare, come estensione del teorema di APPELL a cui sopra si è alluso, che per tali trascendenti intere si possono assumere due *funzioni intermediarie*, ossia due funzioni trascendenti intere che, quando le variabili u_1, \dots, u_p si incrementino delle componenti di uno qualunque dei periodi primitivi della $f(u)$, si riproducano moltiplicate per un esponenziale il cui esponente è una espressione lineare, omogenea o no, delle u_1, \dots, u_p .

In tal guisa il problema viene riportato ad un sistema di equazioni alle differenze finite, la cui soluzione generale è ottenuta dal CONFORTO a conclusione di una elaborata analisi, traendo profitto dal metodo usato da HURWITZ (1897) per l'integrazione di una particolare equazione alle differenze finite con trascendenti intere.

Dopo ciò, seguendo FROBENIUS (1884) e CASTELNUOVO (1921), dall'esistenza di funzioni intermedie si deduce l'esistenza di una *forma riemanniana (alternata) principale* di una matrice di RIEMANN, ossia il verificarsi delle note relazioni di eguaglianza e di disequaglianza tra i periodi primitivi in modo che i periodi formino una matrice di RIEMANN (*).

Partendo da una funzione abeliana di dati periodi, si giunge così a dimostrare che la matrice dei periodi è una matrice di RIEMANN, ossia a stabilire l'esistenza di una forma principale.

Per provare che, inversamente, l'esistenza di una forma principale è sufficiente per l'esistenza delle funzioni abeliane, viene percorso a ritroso il cammino, deducendo dalla forma principale tutte le possibili funzioni intermedie che ad essa appartengono e quindi costruendo, come quozienti di due funzioni intermedie *dello stesso tipo*, tutte le funzioni abeliane di dati periodi. La trattazione viene svolta nel libro in ogni suo particolare (pag. 105 e seguenti).

Molto notevole è che nel corso della medesima, premessa la riduzione, dovuta al FROBENIUS (1879), di una forma bilineare alternata a coefficienti interi, non degenera, alla forma normale mediante una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi, si pervenga in modo necessario e naturale alle relazioni funzionali caratterizzanti le funzioni Θ , le quali pertanto appaiono più introdotte in modo arbitrario ed artificioso. Persino il noto sviluppo in serie di tali trascendenti viene qui a presentarsi originariamente nel modo più spontaneo dallo sviluppo di FOURIER.

Il capitolo I termina col « teorema di esistenza » delle funzioni abeliane, secondo il quale l'esistenza della forma principale è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle funzioni abeliane di dati periodi; e con la classificazione di tutti i possibili corpi di tali funzioni, in dipendenza dei divisori elementari della forma principale, variabili in modo discontinuo, e, per eguali divisori elementari, in dipendenza di $\frac{p \cdot p + 1}{2}$ moduli variabili con continuità.

Il concetto direttivo dell'intera trattazione viene poi di nuovo (p. 189-194) paragonato criticamente, a posteriori, con tutte le varie precedenti trattazioni della teoria.

Nel capitolo II, di collegamento con la geometria algebrica, si dimostra anzitutto che, assegnato un corpo di funzioni abeliane di p variabili, si possono sempre scegliere in esso t funzioni $f_1(u), \dots, f_t(u)$ in modo che $x_h = f_h(u)$ ($h = 1, \dots, t$), essendo le x_h coordinate non omogenee di un punto in uno spazio lineare di t dimensioni, siano le equazioni parametriche di una varietà algebrica a p dimensioni, che risulta in corrispondenza generalmente biunivoca con il parallelepipedo dei periodi.

Una tale varietà (con locuzione familiare nella geometria algebrica) è una *varietà di PICARD* associata al corpo di funzioni abeliane considerato.

Tutte le varietà di PICARD associate ad un medesimo corpo di funzioni abelia-

(*) Per quanto riguarda le relazioni di eguaglianza, una semplicissima dimostrazione del fatto che esse sono una conseguenza dell'esistenza delle funzioni intermedie, fu data, posteriormente alla pubblicazione del libro di CONFORTO, dal COMESSATTI e dallo stesso CONFORTO (Atti dell'Istituto Veneto, vol. 102, parte II (1942-43), pag. 541-549), indipendentemente dalla rappresentazione geometrica di una matrice di RIEMANN in uno spazio proiettivo al modo di SCORZA, della quale si fa invece uso nel volume stesso, pag. 98.

ne sono birazionalmente identiche, così che, dal punto di vista della geometria delle trasformazioni birazionali, per ogni corpo di funzioni abeliane esiste una unica varietà di PICARD.

Le varietà abeliane, ossia le varietà rappresentabili parametricamente mediante funzioni abeliane di un determinato corpo K , sono tutte algebriche e sono tutte e sole le trasformate razionali della varietà di PICARD associata a K , e tutte e sole le varietà rappresentative delle involuzioni irreducibili tracciate sulla varietà di PICARD.

Sulla varietà di PICARD associata al corpo K , le funzioni abeliane di K e le variabili indipendenti si trasformano rispettivamente nelle funzioni razionali e in p integrali semplici di prima specie linearmente indipendenti annessi alla varietà stessa.

Particolarmente notevole è qui la semplice dimostrazione che gli sviluppi del capitolo I. permettono di dare del teorema di APPELL-HUMBERI (1893), secondo il quale ogni varietà algebrica di $p-1$ dimensioni tracciata sulla varietà di PICARD si può rappresentare compiutamente annullando una funzione intermediaia quando tra i punti della varietà di PICARD e i punti del parallelepipedo dei periodi vi sia corrispondenza biunivoca senza eccezioni.

Successivamente si illustrano le più note proprietà delle varietà di PICARD nel caso di moduli generali (gruppi delle trasformazioni birazionali della varietà in sé, base per la totalità delle varietà a $p-1$ dimensioni tracciate su essa, ecc.), mostrando come le circostanze che qui si presentano possano subire modificazioni nel caso di moduli particolari, in guisa da preparare la teoria aritmetica delle funzioni abeliane, riservata ad un successivo volume.

L'opera termina stabilendo un suggestivo parallelismo tra la nozione di matrici di RIEMANN isomorfe (SCORZA, 1916) e il concetto geometrico di varietà di PICARD in corrispondenza razionale tra loro.

Bisogna vivamente augurarsi che presto l'Autore completi col secondo volume una trattazione tanto esauriente, elegante e varia, la quale arricchisce la letteratura matematica italiana di un'opera di carattere fondamentale, degna delle tradizioni della nostra geometria che è stata sempre feconda di preziosi legami con i problemi più elevati dell'analisi.

L. BERZOLARI

BEPPLO LEVI, *Leyendo a Euclides* (Rosario, Editorial, 1947), 225 pagine, 8 dollari argentini.

Gli *Elementi* di Euclide occupano nella storia del pensiero umano un posto preminente, offrendo il primo esempio di costruzione scientifica fondata sul puro raziocinio. La concezione feconda su cui poggia tale costruzione appare talmente nuova e lontana dalle comuni esigenze, da poterne ascrivere la scoperta quasi a miracolo: tanto che lo Zeuthen riteneva che il ritorno della Scienza in Occidente sarebbe stato impossibile se l'opera di Euclide fosse andata irrimediabilmente perduta. Lo spirito a cui quest'opera si informa ha invero importanza fondamentale, più ancora dei risultati in essa contenuti, ed ogni persona colta dovrebbe averne conoscenza non superficiale e possibilmente diretta.

Il volume del LEVI, recentemente apparso, adempie splendidamente il compito di chiarire e sviscerare l'intima essenza degli *Elementi*, attraverso un'analisi originale e penetrante che prepara ed invoglia alla lettura di quel classico.

Il miracolo della fioritura geometrica nell'antica Ellade, può ascriversi allo speciale clima filosofico creatovi dal pensiero socratico. All'esame particolareggiato dei legami fra quest'ultimo ed il sorgere della geometria euclidea, è dedicato un ampio interessantissimo capitolo preliminare. Ivi, assieme a vari cenni storici ed a rapidi suggestivi accostamenti (come ad esempio quello fra Socrate e Galileo), vengono discusse le profonde concezioni scientifiche e le anticipazioni intuitive di sapore profetico che trovansi espresse od adombrate nei *Dialoghi* di Platone; esse sono anche raffrontate alle vedute delle scuole aristotelica e pitagorica, con speciale riguardo alla scoperta degli incommensurabili ed alle ricerche di Ippocrate sulle lunule.

L'A. procede quindi ad un'accurata disamina dell'opera di Euclide, che segue ed illustra passo passo senza preconcetti e con idee personalissime; queste fanno di Euclide un vero precursore della moderna critica dei fondamenti, mostrando come nell'opera sua sia attuato pienamente il proposito di dedurre logicamente risultati (in parte già noti empiricamente) da un ristretto numero di principi semplici, posti in forma astratta od assiomatica, indipendentemente da ogni dato fisico od applicazione strumentale. Così, secondo il Levi, le definizioni non vanno considerate in Euclide come parte integrante del testo, ma come passi di dizionario concernenti le parole di uso meno corrente, aggiunti per comodità del lettore; i postulati, lungi dall'essere interpretati in senso costruttivo, vanno intesi come affermazioni di tipo esistenziale; le nozioni comuni, invece che proposizioni sulle classi, e cioè di teoria degli insiemi, debbono pensarsi quali postulati sull'uguaglianza geometrica. Ad esempio la nozione 4^a, relativa all'uguaglianza fra figure coincidenti, rivece ora il significato di postulato sull'omogeneità dello spazio.

Il suddetto punto di vista vale a chiarire stranezze e ad eliminare incongruenze della costruzione euclidea, e conduce l'A. ad annoverare Euclide (visuto oltre 2000 anni avanti Gerolamo Saccheri!) quale antesignano delle moderne geometrie non euclidee. Vero sì è ch'esso risulta anche in contraddizione con alcuni passi degli *Elementi* a noi pervenuti; ma l'A. sana tale contrasto riguardando quei passi come apocrifi, e dovuti ad interpolazioni posteriori.

Lo spazio ci vieta di seguire minutamente il libro in discorso, il quale inoltre comprende: la dimostrazione del fatto che, se non si ammette il postulato di Archimede, l'equivalenza per somma dei poligoni piani non si riduce all'equivalenza euclidea per somma e differenza; una nuova teoria della proporzionalità fra segmenti, indipendente dalla nozione 5^a di Euclide (il tutto è maggiore della parte), ora anche nota col nome di postulato di De Zolt; una disamina della teoria euclidea dei rapporti fra grandezze, e dei legami che con essa hanno avuto lo studio galileiano del moto uniforme e le ricerche del Borelli preludevoli alla moderna nozione di numero reale; infine un esame del metodo di esaurimento, e del contenuto dei libri aritmetici di Euclide.

L'opera del Levi, ispirata da intima comprensione ed ammirazione per quella di Euclide, va a fondo nelle questioni di cui tratta, evitando con garbo ogni pesantezza tecnica o di erudizione. Essa è redatta in forma attraente ed impeccabile, e le sue brillanti doti divulgative e finemente critiche la renderanno di certo utilissima e bene accetta ad una larga cerchia di lettori.

GINO LORIA: *Guida allo studio della storia delle matematiche*, Milano, Hoepli, 2^a ed., pp. XIX + 385.

Lo scopo della presente opera è quello di evitare a coloro che intendono dedicarsi alla storia delle matematiche « le dolorose incertezze, i passi falsi, la perdita di tempo che non poterono venire evitati agli investigatori precedenti ». L'opera, in questa seconda edizione che segue a distanza di trent'anni la prima, si divide in due Libri ed è seguita da un'Appendice.

Nel Libro I°, dopo una breve digressione sul metodo storico, l'A. fa un'ampia rassegna delle principali opere sulla storia della matematica; si trattiene in particolare sulle storie per paesi e storie per soggetti. Inoltre fa una rassegna delle ricerche di storia della matematica che si trovano nella stampa periodica.

Il Libro II° ha lo scopo di far conoscere i mezzi che sono a disposizione di chi voglia compiere nuove ricerche storiche nel campo delle matematiche. Essi sono di tre specie: biografici, bibliografici, di natura critica. L'A. dà indicazioni su cataloghi di manoscritti, principalmente quelli orientali, esistenti in varie biblioteche. Passa in rassegna opere bio-bibliografiche relative alle matematiche greche e latine, varie edizioni e commenti delle opere dei grandi maestri (specialmente greci), biografie di essi, monografie sulla scienza greca. Fa un elenco di pubblicazioni relative alle matematiche extra-europee, ordinato per nazioni. Per l'età moderna, fa un elenco di biografie e di collezioni biografiche e indica varie fonti biografiche, anche per nazioni e regioni. Indica raccolte di lavori di eminenti matematici, carteggi scientifici, opere (esclusivamente) bibliografiche, indici e cataloghi bibliografici, ecc. Elenca inoltre opere bibliografiche esclusivamente matematiche dividendole in quattro classi: bibliografie generali, bibliografie nazionali, bibliografie per soggetti, bibliografie relative ciascuna ad un solo scienziato. Indica pure opere di recensione, critica, ecc.

L'A. distingue gli scritti sulla storia della scienza nei seguenti tipi: bibliografie; storie di determinate teorie; storia di una determinata scienza in una pre-stabilita regione (stato, provincia, nazione); storie generali di una disciplina; crestomazie. Espone poi suggerimenti relativi al modo di servirsi dei mezzi precedentemente considerati nello scrivere un lavoro di ciascuna specie. L'A. termina il Libro II° con uno sguardo all'evoluzione della storia delle matematiche.

L'Appendice, dedicata a questioni storiche relative alle scienze esatte, è divisa in quattro paragrafi. Il § 1 è diretto a stabilire il significato da attribuire alla locuzione « storia della scienza ». Nel § 2 l'A. sostiene l'opportunità dell'inclusione della storia della matematica nei programmi dell'insegnamento universitario. Il § 3 è inteso a mostrare come la matematica nel suo plurisecolare svolgimento sia stata guidata dall'incessante aspirazione alla generalizzazione. Infine nel § 4 l'A. intende far vedere come la matematica offra nel proprio insieme una compatta unità.

Fra gli elenchi bibliografici che occupano una parte notevole del volume, l'A. inserisce consigli, indicazioni e notizie.

Opera certamente utile questa del LORIA, anche se, come afferma l'A. nella prefazione, vi sono inevitabili omissioni, imputabili, voglio aggiungere, alla vastità del tema trattato. Ottima la veste tipografica.

L. GEYMONAT, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale* (Libreria editrice universitaria Levrotto e Bella, Torino) 1947, pp. IV + 352.

Nel corso di storia delle matematiche affidato dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino al Prof. L. GEYMONAT, a partire dall'autunno 1946, la visione storica relativa allo sviluppo dell'analisi infinitesimale dall'Antichità ai nostri giorni si presenta intimamente legata alle delicate questioni di filosofia della Scienza poste dal pensiero contemporaneo.

Il volume in esame raccoglie i punti fondamentali di tale corso destinato non soltanto a completare la cultura generale degli studentj mostrando la matematica nel suo millenario divenire, ma anche ad esercitare le menti dei discenti sulle sottili riflessioni critiche ispirate ai recenti indirizzi della logica matematica.

La prima parte del volume è dedicata alle origini dell'analisi infinitesimale nel periodo greco fino ad Archimede, la seconda ai primi sviluppi dell'analisi stessa nell'era moderna fino a Newton, Leibniz, ed i primi loro continuatori.

La terza parte dal titolo « La vittoria dell'esigenza del rigore » svolge da un punto di vista non soltanto storico ma soprattutto logico, i suggestivi sviluppi del pensiero moderno concernenti i fondamenti della matematica con speciale riferimento all'analisi.

Particolare rilievo viene dato alla teoria degli insiemi di Cantor, della quale si dimostrano i più importanti risultati; inoltre si prendono fra l'altro in esame le antinomie logiche, le teorie dei tipi e dei gradi di B. Russel escogitate per superare dette antinomie, insieme con le difficoltà sorte dalle teorie stesse, i problemi relativi alla potenza del continuo, la questione dell'esistenza degli insiemi nei suoi rapporti con il postulato di Zermelo, i problemi della misura degli insiemi lineari e dell'integrazione secondo Lebesgue.

Le indicazioni bibliografiche che opportunamente selezionate corredano il volume, lo rendono un punto di partenza per ulteriori studi e ricerche sui suggestivi argomenti trattati.

Il corso di L. GEYMONAT, ed il volume in esame, costituiscono un notevole contributo al progresso ed alla diffusione degli studi di storia e filosofia della scienza, studi che meriterebbero di essere assai più coltivati di quanto lo sono di fatto nelle Università e nelle scuole medie italiane.

E. CARRUCCIO

MACROBERT T. M.: *Functions of a complex variable*, [Third Ed., London (Macmillan and Co. Limited), 1947], pp. XV + 390.

Nella prefazione alla prima edizione del 1916 l'A. avvertiva che il suo volume era scritto per quei lettori che, avendo seguito con profitto dei corsi corrispondenti ai nostri primi bienni per la laurea in matematica, desideravano di familiarizzarsi con gli elementi della teoria delle funzioni di variabile complessa e con le sue principali applicazioni. In quindici capitoli redatti in forma piana, senza preoccupazioni critiche, l'A. raccoglieva i teoremi e le formule più importanti della trattazione tradizionale e vi aggiungeva un avviamento allo studio delle funzioni Beta e Gamma euleriane, della funzione p di WEIERSTRASS, delle funzioni ellit-

tiche di JACOBI, delle equazioni di LEGENDRE e di BESSEL. La seconda edizione del 1933 era arricchita di alcune note esplicative e di tre appendici sulle funzioni ipergeometriche, sulle funzioni di LEGENDRE, sull'integrale di FOURIER, e nell'attuale terza edizione trovasi una nuova appendice sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (confluenti).

Il volume, per la ricchezza del suo contenuto in rapporto alla piccola mole, si raccomanda da sè come un'ottima introduzione alla moderna «teoria delle funzioni».

G. SANSONE

W. V. D. HODGE e D. PEDOE, *Methods of algebraic Geometry*, vol. I (Cambridge, The University Press, 1947), pp. VIII + 440, legato in tela, 30 scellini.

Ebbi già occasione di osservare come l'alto grado di generalità e di perfezione raggiunto dall'Algebra in epoca relativamente recente, permetta oggi alla Geometria algebrica di impostare le questioni su nuove basi, assai più larghe di quelle classiche, fornendo in pari tempo mezzi adeguati — eleganti e potenti — per trattare colla massima generalità i problemi geometrici, specie quelli relativi ai fondamentali.

Nel bellissimo volume in esame vengono esposti in forma perspicua e sistematica alcuni dei metodi suggeriti alla Geometria algebrica dai recenti progressi dell'Algebra, e specialmente le applicazioni dell'Algebra lineare alla Geometria proiettiva. Il volume si divide in due libri, dedicati ordinatamente ai preliminari algebrici ed alla Geometria proiettiva.

Nel libro I, ad una rapida ma suggestiva esposizione delle nozioni fondamentali sui gruppi, anelli, corpi, polinomi, ecc. (cap. I), fa seguito una trattazione semplice ed originale della dipendenza lineare — nonchè degli elementi della teoria delle matrici — sopra un corpo qualsiasi, anche non commutativo (cap. II). È da rilevare la nozione di rango di una matrice introdotta indipendentemente da quella di determinante, il che è reso necessario dal fatto che, mentre il rango (in vista di successive applicazioni) vien definito per matrici sopra corpi arbitrari (di guisacchè esso può non coincidere con quello della matrice trasposta), la teoria dei determinanti è qui svolta soltanto nell'ipotesi di elementi appartenenti ad un corpo commutativo. In quest'ipotesi sono poi anche ottenuti i risultati classici sui fattori invarianti e sui divisori elementari delle matrici ad elementi polinomi.

Gli altri due capitoli del libro I vertono sulla teoria delle equazioni algebriche, e saranno utilizzati soltanto in un volume successivo (dedicato alle varietà algebriche), sicchè essi potrebbero venire omissi in una prima lettura del presente volume. Il cap. III tratta, in forma puramente algebrica, delle estensioni di un corpo nonchè delle fattorizzazioni e derivazioni dei polinomi sopra un corpo commutativo; vanno particolarmente segnalati l'elegante teoria algebrica dei jacobiani, ed i criteri — ottenuti con essa — per la dipendenza algebrica in un corpo di funzioni. Il cap. IV comprende i due teoremi di Hilbert sugli ideali determinati da polinomi, ed un'esposizione limpida e succosa della teoria generale dell'eliminazione.

Il libro II verte sulla Geometria iperspaziale lineare, e s'inizia con un profondo raffronto fra la definizione algebrica di iperspazio (poggianti sull'uso

delle coordinate) e quella sintetica (basata su opportuni postulati geometrici). I primi fondamenti del metodo algebrico sono intanto posti: nel cap. V coll'introdurre le coordinate quali elementi di un corpo arbitrario, valendosi in modo essenziale dei risultati del cap. II, fino ad ottenere le proposizioni di incidenza. Da queste è poi dedotto in modo autonomo il teorema di Desargues, di cui vengono esaminati minutamente i numerosi casi limite, nell'ipotesi che lo spazio ambiente abbia dimensione ≥ 3 . Sono poi altresì derivate le costruzioni grafiche fondamentali mediante le quali (nel successivo cap. VI) si mostra come — assunte le proposizioni di incidenza ed il teorema di Desargues quali postulati — possano introdursi le coordinate ed effettuarsi le costruzioni di proiettività. Il cap. VI contiene inoltre una dimostrazione (dovuta a F. R. Moultou) dell'indipendenza in geometria piana del teorema di Desargues dalle proposizioni di incidenza, e lo studio di varie conseguenze che si ottengono ove si aggiunga il teorema di Pappo ai postulati fondamentali, il che equivale notoriamente a supporre commutativo il corpo delle coordinate.

La parte restante del volume torna ad assumere un'impronta spiccatamente algebrica, e si riferisce sempre ad uno spazio ambiente definito sopra un corpo commutativo di caratteristica zero. Il cap. VII introduce le coordinate grassmanniane degli spazi subordinati e le loro duali, ed esprime coll'uso di queste le diverse condizioni di incidenza fra detti spazi; esso inoltre contiene una dimostrazione (che risale al Weitzenböck) del teorema di Mertens sulla base per la totalità delle relazioni algebriche intercedenti fra le coordinate grassmanniane degli spazi subordinati di data dimensione. Gli ultimi due capitoli trattano rispettivamente delle omografie e delle reciprocità fra spazi sovrapposti, valendosi della riduzione delle loro equazioni a forma canonica ottenuta in base ai risultati del cap. II, e comprendono la completa classificazione di quelle trasformazioni ed uno studio di alcuni loro casi particolari notevoli; da notarsi l'analisi generale delle correlazioni imperniata sulla considerazione simultanea di una forma bilineare simmetrica e di una forma bilineare emisimmetrica.

È curioso che in tutto il volume non si parli mai esplicitamente di birapporti, sebbene l'introduzione di questa nozione avrebbe potuto in vari punti riuscire utile, ad esempio col permettere di assegnare il noto significato geometrico degli invarianti di un'omografia. Ciò va forse collegato al fatto che — per ragioni di spazio, e particolarmente negli ultimi due capitoli — soltanto alcune fra le conseguenze geometriche delle teorie algebriche esposte vengono indicate, e questo senza troppo addentrarsi nell'aspetto più propriamente geometrico delle questioni.

L'opera in discorso è nel suo assieme veramente eccellente, ed è da auspicare che venga presto completata. Essa rielabora profondamente l'ampia materia, esponendola in maniera ammirevole per precisione e chiarezza, sì che parecchi degli argomenti trattati raggiungono una sistemazione che può considerarsi come definitiva; gli enunciati vengono sempre dati nella forma più completa e le dimostrazioni sono condotte colla massima cura, senza lasciar nulla al lettore che non sia detto in modo esplicito. Nessuna nozione specifica di Algebra o di Geometria è richiesta preventivamente; ed il volume riesce di lettura piacevole anche per il suo stile lucido e stringato, per la scelta sempre felice delle notazioni, e per la perfezione della veste tipografica.

Bericht über die Mathematische Tagung in Tübingen (Tubinga, 1946).

Il presente volume di poco meno che 150 pagine dà notizia del primo congresso di matematici, tenutosi in Germania dopo la fine dell'ultimo conflitto. Il congresso si è tenuto a Tubinga nel Württemberg, attualmente nella zona d'occupazione francese, dal 23 al 27 settembre 1946, per iniziativa dell'Istituto matematico di quella università, che ha anche curato la pubblicazione dei relativi rendiconti; ad esso hanno partecipato circa 150 matematici, provenienti da tutte le zone della Germania, oltre ad alcuni matematici svizzeri e francesi.

Il volume riporta per intero il discorso d'apertura del Prof. E. KAMKE di Tubinga; seguono un brevissimo indirizzo del Sig. CHEVAL, amministratore dell'università per conto del governo di occupazione, ed uno studio del Prof. E. HOFMANN sulla matematica di LEIBNIZ; tutto il resto del volume è dedicato ai riassunti delle comunicazioni, in numero di circa 50. Al volume è opportunamente allegato un breve fascicolo, redatto a cura dell'Istituto di ricerche matematiche in Oberwolfach, contenente gli indirizzi aggiornati (al 1946) di circa 240 matematici tedeschi.

Dai sunti delle comunicazioni presentate appare chiaro che, nonostante le gravi difficoltà, si lavora in Germania nel campo matematico con grande diligenza, serietà ed elevatezza di intenti. Non potendosi dare notizia singolarmente di tutte le comunicazioni e men che meno un giudizio, trattandosi soltanto di sunti molto spesso limitati al semplice annuncio dei risultati, converrà almeno dire che tutti i temi tradizionali nella ricerca matematica tedesca degli ultimi anni sono rappresentati e ripresi: tra gli altri, la teoria dei numeri, l'algebra astratta, la geometria differenziale, le funzioni analitiche di una e più variabili, le equazioni a derivate parziali, la meccanica analitica, il calcolo numerico.

Chi volesse usufruire dell'elenco di indirizzi più sopra menzionato, tenga conto che una copia di esso trovasi depositata presso la Biblioteca dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma.

F. CONFORTO

N. BOURBAKI: *Éléments de mathématique*. (Actualités scientifiques et industrielles), Editeurs Hermann & C.ie, Paris, 1947.

Degli *Éléments de mathématique* di N. BOURBAKI di cui è stata fatta un'analisi metodologica nella nota *Sull'unità delle discipline algebriche* nel presente Bollettino (S. 3, vol. 2, p. 140), sono apparsi ora due ulteriori volumi, portando così a sei il numero dei tomi pubblicati.

Il capitolo 2 del trattato di algebra (libro II) intitolato *Algèbre linéaire* tratta i seguenti argomenti: Modules, Applications linéaires, Structure des espaces vectoriels, Dualité (tra un modulo e l'insieme delle sue applicazioni lineari), Matrices, Algèbres (anelli ad operatori). (È annunciata prossima la pubblicazione del cap. 3: *Algèbre multilinéaire*).

I capitoli 5, 6, 7, 8 del trattato di topologia generale (libro III) hanno rispettivamente i titoli: *Groupes à un paramètre*; *Espaces numériques et espaces projectifs*; *Les groupes additifs R* ; *Nombres complexes*.

È superfluo aggiungere che questi due volumi, che continuano la trattazione delle materie dei volumi precedenti, non sono a questi nè diversi per metodo nè inferiori per valore.

L. CALABI