Bollettino
Unione Matematica Italiana

Vincenzo Amato

Sul gruppo di monodromia della equazioni a gruppo algebrico G_S

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 193–195.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_193_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sul gruppo di monodromia delle equazioni a gruppo algebrico G_S.

Nota di VINCENZO AMATO (a Catania).

Sunto. - *Data la sostituzione regolare* S, *di ordine* ρr *e di periodo* r, *si determinano un orientamento relativo al gruppo di monodromia di una equazione a gruppo algebrico* G_S.

1. Supponiamo che nell'equazione

$$f(z, u) = \alpha_0 u^m + \alpha_1 u^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0 \tag{1}$$

le α siano funzioni razionali intere di z e che, nel campo di razionalità dei coefficienti di esse ampliato con la z, il gruppo di GALOIS (*gruppo algebrico*) dell'equazione sia quello di tutte le sostituzioni su $m = \rho r$ lettere $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ permutabili con la sostituzione

$$S = (u_1 u_2 \dots u_r)(u_{r+1} \dots u_{2r}) \dots (u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m).$$

Di questo gruppo, che chiamo G_S, di ordine $\rho! \cdot r^\rho$, detto *sottogruppo fondamentale del totale* (sulle $u_1, u_2, \dots, u_m$), è nota la proprietà caratteristica di permutare circolarmente tutti gli elementi di ogni ciclo della S con quelle di un altro (o dello stesso ciclo) in tutti i modi possibili [1]. Esso è perciò dotato, rispetto ai sistemi

$$u_1 \dots u_r,\ u_{r+1} \dots u_{2r},\ \dots,\ u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m,$$

di un'imprimitività che può dirsi *imprimitività ciclica*.

[1] V. AMATO: *Sul gruppo totale di sostituzioni su* n *lettere*, « Atti dell'Acc. Gioenia », serie 5ª, vol. XX, 1934.

Ne segue che G_S è semplicemente transitivo sulle m lettere.

La $f(z, u)$ è perciò irriducibile cioè non può essere il prodotto di due altri polinomi interi nelle z, u.

2. Se la (1) è supposta a gruppo algebrico G_S nel senso che la S, oltre ad essere diversa dalla sostituzione identica, non sia un unico ciclo sulle m lettere, si debbono escludere i casi $\rho = m$, $\rho = 1$.

Il gruppo G_S non è perciò ciclico di ordine m nè coincide col gruppo totale su m lettere.

Sotto tutte le ipotesi fatte, si voglia studiare il gruppo di monodromia della (1).

È noto [2] che questo gruppo è transitivo ed invariante nell'algebrico; lo studio è perciò da volgersi alla determinazione dei sottogruppi transitivi ed invarianti in G_S (fra i quali bisogna includere lo stesso G_S).

A tale scopo conviene osservare che G_S può esser messo in corrispondenza d'isomorfismo meriedrico col gruppo totale $G_{\rho!}$ su ρ lettere (con ρ sempre diverso da 1 e da $m = \rho r$).

Infatti, se i sistemi ordinati di r lettere

$$u_1 \dots u_r,\quad u_{r+1} \dots u_{2r},\quad \dots,\quad u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m$$

si indicano rispettivamente con $s_1, s_2, \dots, s_\rho$, alla sostituzione 1 di $G_{\rho!}$ si possono far corrispondere quelle di G_S che permutano (ciclicamente) le lettere u di ogni sistema e che costituiscono un gruppo Γ, di ordine r^ρ, prodotto dei gruppi:

$$\begin{array}{llll} 1, & (u_1 \dots u_r), & (u_1 \dots u_r)^2, \dots, & (u_1 \dots u_r)^{r-1}, \\ 1, & (u_{r+1} \dots u_{2r}), & (u_{r+1} \dots u_{2r})^2, \dots, & (u_{r+1} \dots u_{2r})^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & (u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m), & u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m)^2, \dots, & (u_{(\rho-1)r+1} \dots u_m)^{r-1}, \end{array}$$

invariante in G_S. Ad ogni rimanente sostituzione di $G_{\rho!}$ corrisponderà lo stesso numero r^ρ di sostituzioni ben determinate di G_S che non permutano (ciclicamente) in sè alcun sistema s.

V. Amato: *Sulle equazioni algebriche il cui gruppo di Galois è un sottogruppo fondamentale del totale*, « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », tomo LVIII, 1934.

Cfr. *Esercitazioni matematiche* del « Circolo matematico di Catania », 1934.

(2) Vedi per es. L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois*, Pisa, Spoerri, 1900, p. 236.

Il gruppo Γ, non risultando ovviamente transitivo, non può essere il gruppo di monodromia della (1).

È utile tener presente per la ricerca del detto gruppo di monodromia che il gruppo $G_{\rho!}$ col quale G_S è in corrispondenza d'isomorfismo meriedrico non ha, perchè tale su ρ lettere, altro sottogruppo puro invariante (e transitivo) che l'alterno ad eccezione del caso $\rho = 4$ nel quale anche il *vierergruppe* è invariante e transitivo.

Se $\rho = r = 2$ (e perciò $m = 4$) si ha:

$$S = (u_1u_2)(u_3u_4)$$

e il gruppo di monodromia può essere uno dei tre seguenti:

$$1, \quad (u_1u_3u_2u_4), \quad (u_1u_2)(u_3u_4), \quad (u_1u_4u_2u_3),$$

$$1, \quad (u_1u_2)(u_3u_4), \quad (u_1u_3)(u_2u_4), \quad (u_1u_4)(u_2u_3), \tag{2}$$

o lo stesso G_S:

$$1, \quad (u_1u_3u_2u_4) \quad (u_1u_2)(u_3u_4), \quad (u_1u_4u_2u_3),$$
$$(u_1u_2), \quad (u_3u_4), \quad (u_1u_3)(u_2u_4), \quad (u_1u_4)(u_2u_3).$$

Sicchè possiamo concludere:

Se m $= 4$, *l'equazione*

$$\alpha_0u^4 + \alpha_1u^3 + \alpha_2u^2 + \alpha_3u + \alpha_4 = 0, \tag{3}$$

supposta a gruppo algebrico G_S *con*

$$S = (u_1u_2)(u_3u_4),$$

può avere per gruppo di monodromia lo stesso G_S *(gruppo del quadrato) o il gruppo* (2) *o il gruppo ciclico formato con le potenze di* $(u_1u_3u_2u_4)$ [3].

3. Nel caso in cui la (3) abbia per gruppo di monodromia il gruppo (2), i quattro rami si diramano nei q punti critici algebrici della u data dalla (3).

Il genere p della Riemanniana dipende perciò da q e la Riemanniana è regolare.

In particolare, se $q = 3$, applicando la formula generale di RIEMANN [4], si ha:

$$p = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2) - (4 - 1) = 0.$$

[3] Cfr. V. AMATO: *Una proprietà caratteristica del gruppo del quadrato,* « Le matematiche », Catania, vol. I, 1946, p. 21 e l'altra Nota: *Sui gruppi diedrali,* ibid., vol. II, 1946.

[4] APPELL e GOURSAT: *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales,* Gautier-Villars, tomo I, p. 232.