Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Villa

Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 201–204.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_201_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche.

Nota di MARIO VILLA (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si espongono due proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche di curve piane algebriche intimamente collegate tra loro.*

1. Espongo qui due proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche di curve piane algebriche, intimamente collegate tra loro, ed altre proprietà che ad esse pure si collegano, omettendone le dimostrazioni che appariranno in altro lavoro.

Una delle due proprietà è la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* >1 *sia omaloidica è che la curva generica di* R *intersechi la Jacobiana* J *d'* R *soltanto nei punti base e che in questi* J *si comporti regolarmente* (¹)

Data una rete di curve piane algebriche d'ordine >1 (a Jacobiana non indeterminata) chiamo *tangente stazionaria* in un punto P della curva Jacobiana (non base della rete) la tangente comune alle curve della rete passanti per P. Ciò posto l'altra proprietà è la seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una rete R *di curve piane algebriche d'ordine* >1 *sia omaloidica è che in ogni punto della Jacobiana* J *di* R *la tangente stazionaria sia ivi tangente alla Jacobiana (oppure sia indeterminata, oppure, se di* J *fa parte una curva* C *contata* $\nu>1$ *volte e se il punto appartiene a* C, *che la*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario matematico dell'Università di Bologna.

(¹) Data una rete di curve piane algebriche, in un punto base O di multiplicità s, con punti base infinitamente vicini O_1, O_2,... di multiplicità s_1, s_2,... nell'intorno del 1° ordine, con punti base infinitamente vicini O_{11}, O_{12},... di multiplicità s_{11}, s_{12},... nell'intorno del 2° ordine,... la Jacobiana J della rete ha in O almeno la multiplicità $3s-1$, in O_1, O_2... almeno le multiplicità (eventualmente *virtuali*) $3s_1-1$, $3s_2-1$, .., in O_{11}, O_{12},... almeno le multiplicità $3s_{11}-1$, $3s_{12}-1$, . . Quando le multiplicità (eventualmente *virtuali*) di J in O, O_1, O_2, . ., O_{11}. O_{12},... sono *esattamente* $3s-1$, $3s_1-1$, $3s_2-1$,..., $3s_{11}-1$, $3s_{12}-1$,.. si dirà che J in quella singolarità base si comporta *regolarmente.*

Le reti di curve che vengono considerate in questa Nota si suppongono prive di componenti fisse.

tangente stazionaria coincida con la tangente ivi a C) e che nei punti base J *si comporti regolarmente.*

Da questo teorema segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la rete R *individuata da tre curve piane algebriche dello stesso ordine* $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ (f, φ, ψ *polinomi omogenei nelle variabili* x_1, x_2, x_3, *dello stesso grado, linearmente indipendenti, a Jacobiano* J *non identicamente nullo) sia omaloidica è che il polinomio*

$$(1) \qquad (f\varphi_1 - \varphi f_1)J_2' - (f\varphi_2 - \varphi f_2)J_1'$$

sia divisibile per J', *oppure sia identicamente nullo, e che la Jacobiana* $J=0$ *si comporti regolarmente nei punti base* [2].

In altri termini:

Dati tre polinomi f, φ, ψ, *omogenei nelle variabili* x_1, x_2, x_3, *dello stesso grado (linearmente indipendenti, a Jacobiano* J *non identicamente nullo), condizione necessaria e sufficiente affinchè dalle*

$$(2) \qquad y_1 = f, \qquad y_2 = \varphi, \qquad y_3 = \psi,$$

possano trarsi le inverse

$$x_1 = F, \qquad x_2 = \Phi, \qquad x_3 = \Psi,$$

dove F, Φ, Ψ *sono polinomi omogenei nelle* y_1, y_2, y_3, *dello stesso grado (vale a dire: affinchè le* (2) *rappresentino una trasformazione cremoniana) è che il polinomio*

$$(1) \qquad (f\varphi_1 - \varphi f_1)J_2' - (f\varphi_2 - \varphi f_2)J_1'$$

sia divisibile per J', *oppure sia identicamente nullo, e che la Jaco-*

[2] Se il polinomio J è irriducile, oppure se è riducibile ma i fattori che lo costituiscono appaiono elevati alla prima potenza, si porrà $J \equiv J'$. Se invece J è riducibile e in esso appaiono fattori con esponenti > 1, allora J' è il polinomio costituito da tutti e soli i fattori costituenti J elevati alla prima potenza. Nell'enunciato del testo, al polinomio (1) si può sostituire il polinomio $(f\varphi_1 - \varphi f_1)J_3' - (f\varphi_3 - \varphi f_3)J_1'$, oppure il polinomio $(f\varphi_2 - \varphi f_2)J_3' - (f\varphi_3 - \varphi f_3)J_2'$. Fa però eccezione il caso in cui J è divisibile per x_3. Allora affinchè la rete sia omaloidica oltre ad essere divisibile per J' il polinomio (1), occorre che sia divisibile per J' anche il primo dei polinomi ora indicati (il che nel caso presente non avviene necessariamente) e, se J è divisibile anche per x_2, occorre ancora che sia divisibile per J' anche il secondo dei polinomi precedenti (il che nel caso presente non avviene necessariamente). Gli indici in basso indicano derivate parziali: così $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ e analogamente.

biana della rete individuata dalle tre curve $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ *si comporti regolarmente nei punti base* (³).

Osservazione: Se in questi due ultimi enunciati al polinomio $(f\varphi_1-\varphi f_1)J_2'-(f\varphi_2-\varphi f_2)J_1'$, o ad uno dei due indicati nella (²), sostituiamo il polinomio

$$(f\varphi_1-\varphi f_1)J_2-(f\varphi_2-\varphi f_2)J_1, \tag{3}$$

oppure $(f\varphi_1-\varphi f_1)J_3-(f\varphi_3-\varphi f_3)J_1$ o $(f\varphi_2-\varphi f_2)J_3-(f\varphi_3-\varphi f_3)J_2$, e si impone la divisibilità per J (invece che per J'), si ottiene una condizione soltanto necessaria (in quanto sfugge il caso in cui la Jacobiana ha una componente multipla). Di conseguenza, dovendosi verificare se una rete è o no omaloidica, si dovrà ricorrere alla (1). Invece nella ricerca di reti omaloidiche col metodo analitico che scaturisce dal risultato precedente, converrà ricorrere alla (3) sulla quale s'impernia appunto un *metodo nuovo.*

2. Data una rete R di curve piane algebriche d'ordine $n>1$, indichiamo con x_1 il numero dei punti base semplici, con x_2 quello dei punti base doppi, ..., con x_r quello dei punti base r-pli, ..., con x_{n-1} quello dei punti base $(n-1)$-pli, tutti questi punti base essendo fra loro distinti o infinitamente vicini.

Orbene, dalla prima proprietà del n. 1 segue che *quando e solo quando la* R *è omaloidica sussiste la relazione*

$$\Sigma\, r(3r-1)x_r=3n(n-1), \tag{4}$$

dalla quale si deducono le due classiche relazioni di Cremona (⁴)

$$\Sigma\, r^2x_r=n^2-1, \qquad \Sigma\, rx_r=3(n-1),$$

le quali, in definitiva, ne costituiscono una sola: la (4).

3. Data una rete di curve piane algebriche d'ordine >1 (a Jacobiana non indeterminata), le curve della rete passanti per un punto P della Jacobiana J (diverso dagli eventuali punti base della

(³) In questo enunciato al polinomio (1) si può sostituire uno qualunque dei due polinomi indicati nella (²). Se però J è divisibile per x_3 (per x_2 o per x_1) alla condizione del testo si deve aggiungere quella o quelle esposte nella (²). Se f, φ, ψ sono di 1° grado, le (2) rappresentano una omografia e la condizione (1) è senz'altro verificata essendo $J_1'\equiv J_2'\equiv 0$.

(⁴) Si veda: *Opere matematiche di Luigi Cremona*, vol. II. Hoepli, Milano, pp. 56-194, 1915; Berzolari, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, « Enzykl. d. Math. Wiss. », III, C, 11, Teubner, Berlin, pp. 1952-2037, 1933.

rete) hanno tutte la stessa tangente t (*tangente stazionaria*), esclusa la curva della rete avente in P punto doppio. La curva Γ inviluppata dalle ∞^1 rette stazionarie t (relative agli ∞^1 punti P di J), è la cayleyana della rete.

La curva della rete avente in P punto doppio ha ivi per tangenti due rette t_1, t_2 (che si diranno *tangenti nodali*) che, com'è ben noto [5], separano armonicamente la coppia costituita dalla tangente in P alla Jacobiana e dalla tangente stazionaria. Anche l'inviluppo delle tangenti nodali t_1, t_2 è covariante proiettivo della rete [6].

Quando e solo quando la rete è omaloidica la curva Γ *coincide con* J' [7] *e la Jacobiana della rete si comporta regolarmente nei punti base.* La coincidenza della tangente stazionaria con quella della Jacobiana implica la coincidenza di una delle tangenti nodali con la tangente alla Jacobiana, e inversamente.

Segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una rete di curve piane algebriche sia omaloidica è che la curva inviluppata dalle tangenti nodali si spezzi in J' [8] *e in una curva residua e che la Jacobiana della rete si comporti regolarmente nei punti base*

Per le reti omaloidiche, rimane quindi da considerare la curva residua [9].

---

(5) Si veda ad es.: VILLA, *Sulle singolarità della Jacobiana di* r + 1 *ipersuperficie dello spazio ad* r *dimensioni*, « Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », ser. III, vol. XIII, pp. 180. 242, 243, 1931.

(6) I punti in cui si intersecano la curva Γ e la curva inviluppata dalle tangenti nodali e i punti in cui esse intersecano J potrebbero pure essere esaminati.

(7) Se però nella rete esiste un fascio di curve dotato di una curva base C, contata almeno due volte, allora Γ è dato da J' a cui si sia tolta la componente C (si badi che C fa parte di J, contata almeno due volte, e quindi di J').

(8) Vale la stessa riserva espressa nella (7).

(9) Per una rete omaloidica di coniche, l'inviluppo delle tangenti nodali, diverse da quelle della Jacobiana, è costituito dai tre fasci di rette aventi per centri i tre punti base. In questo caso manca quindi la curva residua.