Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Alcune notevoli proprietà del centro d'inerzia relative alle rotazioni permanenti nella dinamica del corpo rigido con un punto fisso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 214–219.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_214_0>

Alcune notevoli proprietà del centro d'inerzia relative alle rotazioni permanenti nella dinamica del corpo rigido con un punto fisso.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si stabiliscono alcune proprietà del centro d'inerzia considerato dall'Autore in un precedente lavoro, dimostrando così l'importanza che tale centro d'inerzia ha per quel che concerne le rotazioni permanenti nel moto di un corpo con un punto fisso nel caso che non agiscano forze attive e nel caso che agisca il peso.*

In questa Nota ritorno sulla nozione di centro d'inerzia da me considerata in una Nota del 1931 ([1]) e dimostro alcune proprietà che mettono ancor più in luce l'importanza di tale centro per ciò che concerne la permanenza di rotazioni intorno ad assi, sia nel moto alla POINSOT, sia nel moto di un corpo pesante con un punto

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

([1]) M. MANARINI, *Sopra un teorema di Staude-Van der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso,* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », 1931, vol. XIV, s. 6ª, sem. 2°, pagg. 572-577.

fisso. Inoltre in quest'ultimo caso deduco, in modo più semplice, il valore da me già ottenuto nella Nota citata della velocità angolare del corpo nella rotazione uniforme intorno ad un asse di permanente rotazione, disposto opportunamente secondo la verticale.

1. Consideriamo un corpo rigido mobile intorno ad un asse. Se ω è il vettore velocità angolare all'istante t, per il risultante $\boldsymbol{R}$ delle forze centrifughe delle particelle del corpo e per il momento risultante Ω_O delle stesse forze rispetto ad un punto O dell'asse, si hanno le espressioni:

$$\boldsymbol{R} = \omega \wedge M \boldsymbol{v}_G, \tag{1}$$

$$\Omega_O = \omega \wedge \boldsymbol{k}_O, \tag{2}$$

nelle quali M è la massa del corpo, $\boldsymbol{v}_G$ è la velocità del suo baricentro G e $\boldsymbol{k}_O$ è il momento della quantità di moto del corpo rispetto ad O. La (1) esprime che il risultante delle forze centrifughe è uguale alla forza centrifuga di tutta la massa concentrata nel baricentro; cosicchè $\boldsymbol{R}$ è nullo quando e soltanto quando l'asse di rotazione è un asse baricentrico. Dalla (2) si deduce che Ω_O è nullo quando e soltanto quando l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia rispetto ad O; cosicchè si ha il noto risultato che il sistema delle forze centrifughe è un sistema in equilibrio quando l'asse di rotazione è un asse centrale d'inerzia; e soltanto in questo caso.

In generale il sistema delle forze centrifughe è equivalente ad una forza (perpendicolare all'asse di rotazione e agente nel piano di G e dell'asse) e ad una coppia (agente in un piano contenente l'asse medesimo): e sarà equivalente ad una sola forza quando risulti

$$\boldsymbol{R} \times \Omega_O \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{R} \neq 0; \tag{3}$$

e soltanto in questo caso. Soddisfatta questa condizione, poichè la forza e la coppia giacciono in uno stesso piano passante per l'asse di rotazione, l'asse centrale del sistema delle forze centrifughe incontrerà tale asse di rotazione in un punto C che si potrà prendere quale polo di riduzione delle forze centrifughe ad una forza sola. Chiameremo questo punto C il *centro d'inerzia* del corpo relativo all'asse di rotazione considerato; e, come risulterà dal seguito, esso è il centro d'inerzia da me considerato nella Nota citata quale punto dell'asse rispetto al quale l'asse stesso è asse principale d'inerzia per il corpo.

Se Ω_{O_1} è il momento delle forze centrifughe rispetto ad un punto O_1 dell'asse di rotazione distinto da O, avremo:

$$\Omega_O = \Omega_{O_1} + (O_1 - O) \wedge \boldsymbol{R}:$$

onde, nel caso che valga la (3), il centro d'inerzia C dell'asse di rotazione esisterà certamente, e per esso si avrà:

$$\Omega_O = (C - O) \wedge \boldsymbol{R}, \tag{4}$$

da cui:

$$C - O = \frac{\boldsymbol{R} \wedge \Omega_O}{R^2} = \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{k}_O}{R^2}\,\omega\,;$$

onde:

$$l = \mathrm{mod}\,(C - O) = \frac{\Omega_O}{R}. \tag{6}$$

Da quanto precede risulta che *condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra un asse di rotazione di un corpo esista il centro d'inerzia è che per un punto qualsiasi O dell'asse valga la* (3), *ossia, tenendo presente la* (2), *si abbia:*

$$\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{k}_O \times \omega = 0. \tag{7}$$

Questa relazione esprime la complanarità dei tre vettori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{k}_O$ e ω. Poichè $\boldsymbol{R}$ è nel piano di ω e di $G - O$, si deduce che la (7) si può porre nella forma:

$$(G - O) \wedge \boldsymbol{k}_O \times \omega = 0, \tag{7'}$$

la quale esprime che il vettore $\boldsymbol{k}_O$ deve trovarsi nel piano del baricentro G del corpo e dell'asse di rotazione.

Poniamo ora:

$$\omega = \omega \boldsymbol{a}, \qquad G - O = h\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

e teniamo presente che, se σ_O è l'omografia d'inerzia rispetto al punto 0, si ha:

$$\sigma_O \omega = \omega \sigma_O \boldsymbol{a} = \boldsymbol{k}_O. \tag{9}$$

Allora la condizione (7'), e quindi la (7), si può porre nella forma:

$$\sigma_O \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0. \tag{10}$$

Essendo σ_O e $\boldsymbol{b}$ elementi noti in corrispondenza del corpo considerato e del punto O, per la (10) abbiamo che *le rette passanti per O e determinate dal versore* $\boldsymbol{a}$, *sulle quali, prese come assi di rotazione, esiste il centro d'inerzia, sono le generatrici del cono quadrico* (10); *e soltanto esse.* Chiameremo tale cono il *cono d'inerzia* del corpo relativo al punto O. A questo cono appartengono anche gli assi principali d'inerzia del corpo rispetto al punto O. Il centro d'inerzia C, esistente sopra ogni generatrice del cono (10), per la (6) avrà da O una distanza l data da:

$$l = \frac{\Omega_O}{Mh\omega^2 \operatorname{sen} \theta}, \tag{11}$$

nella quale θ è l'angolo che $G - O$ forma col versore a che determina la generatrice considerata. Per gli assi principali d'inerzia passanti per O è $\Omega_O = 0$ e quindi risulta $l = 0$; cosicchè il centro d'inerzia per tali assi è il punto O stesso. In generale *per ogni generatrice del cono d'inerzia* (10) *il relativo centro d'inerzia è il punto rispetto al quale la generatrice stessa è asse principale d'inerzia del corpo*, come risulta dal confronto con le formule III e IV della Nota citata.

2. Consideriamo ora un corpo non soggetto a forze attive ed il cono d'inerzia relativo ad un punto O, dato dalla (10). Posto il corpo in rotazione attorno ad una generatrice di tale cono, se si fissa il centro d'inerzia esistente su di essa, il sistema delle forze centrifughe, che sarebbe il solo a poter turbare il moto del corpo, risulta inefficiente; onde il corpo continuerà a ruotare intorno a tale retta con la velocità angolare impressagli inizialmente. Pertanto *il cono d'inerzia* (10), *di vertice* O, *costituisce il luogo delle rette passanti per* O *tali che, prese come assi di rotazione del corpo, fissando su ciascuna di esse soltanto il rispettivo centro d'inerzia, divengono assi di permanente rotazione.* In particolare, conformemente ad una proprietà ben nota, il punto da fissare è il punto O stesso, qualora si tratti di una delle tre generatrici del cono che sono assi principali d'inerzia del corpo relativamente ad O.

Ponendo un corpo non soggetto a forze attive in moto di rotazione uniforme attorno ad una retta della quale siano fissati due punti A e B, questi, a causa della rotazione del corpo, sostengono uno sforzo che si può calcolare facilmente. Se l'asse di rotazione contiene un centro d'inerzia e questo coincide col punto fisso A, il corpo seguiterà a ruotare uniformemente intorno alla retta AB anche se il punto B viene liberato; cosicchè in B non verrà esercitato nessun sforzo, che invece verrà esercitato tutto su A. Se poi, oltre le circostanze precedenti, l'asse di rotazione contiene il baricentro, nessun punto di tale asse sostiene sforzi a causa della rotazione del corpo.

3. Supponiamo ora che il corpo sia pesante e sia fissato in un punto O che non coincida col baricentro G. Imprimiamo al corpo una rotazione attorno ad una delle generatrici del cono d'inerzia relativo ad O disponendo il rispettivo centro d'inerzia al disotto di O

(cfr. la Nota citata). Riducendo il sistema delle forze centrifughe ad una forza e ad una coppia, prendendo come centro di riduzione il punto fisso O, si è condotti a tener conto soltanto di una coppia Ω_O giacente nel piano α dell'asse istantaneo di rotazione e del baricentro G. Questa coppia, come il peso del corpo, tenderà a far muovere la retta OG nel piano α; onde possiamo proporci di calcolare quale valore dovrà avere la velocità angolare ω del corpo affinchè l'effetto della coppia Ω_O compensi l'effetto del peso; per modo che, se tale compenso si verifica all'istante t, esso dovrà verificarsi in ogni altro istante successivo, giacchè nessuna causa verrà a produrre turbamento al moto del corpo. In tal modo si verrà a realizzare una rotazione uniforme intorno a detto asse. Dunque affinchè si verifichi ciò dovrà essere:

$$\Omega_O = (G - O) \wedge Mga, \tag{12}$$

nella quale a è il versore diretto secondo la verticale e orientato verso il basso e g è l'accelerazione di gravità. Uguagliando i moduli si dovrà avere:

$$\Omega_O = Mgh \operatorname{sen} \theta, \tag{12'}$$

essendo $h = \operatorname{mod}(G - O)$ e θ l'angolo che $G - O$ forma con l'asse di rotazione. Allora se il corpo pesante si pone in rotazione attorno ad una generatrice del cono d'inerzia (10) relativo ad O e disposta verticalmente col centro d'inerzia al disotto di O, tenendo presente la (11), si deduce che imprimendo al corpo una velocità angolare ω data da

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{13}$$

nella quale l è la distanza di O dal centro d'inerzia della generatrice scelta, il corpo continuerà a ruotare uniformemente intorno a tale asse, come se questo asse fosse fissato anche in un altro punto distinto da O. Sicchè *ciascuna generatrice del cono d'inerzia rispetto al punto* O, *definito dalla* (10), *posta verticalmente in modo opportuno è, per il corpo pesante, asse di permanente rotazione quando si imprima al corpo una velocità angolare* ω *il cui valore sia dato dalla* (13); *valore che dipende dalla posizione rispetto ad* O *del centro d'inerzia relativo alla generatrice considerata.* Tale cono d'inerzia, in questo caso, s'identifica col cono di STAUDE (o di AMPÈRE).

Il semplice e notevole risultato indicato dalla (13) è conforme a quanto ho stabilito, per altra via, nella Nota citata all'inizio ed è anche in accordo con quanto ho stabilito nella stessa Nota, affermando che se si pone il corpo pesante in rotazione intorno ad una qualsiasi generatrice del cono d'inerzia relativo ad O, posta verticalmente, con una qualsiasi velocità angolare ω, l'asse istantaneo di rotazione tende a deviare nel piano di G e dell'asse sotto l'azione di una coppia giacente in tale piano e di momento il cui modulo è $|Mh \operatorname{sen} \theta(\omega^2 l - g)|$.

Altre proprietà relative al centro d'inerzia si trovano nella Nota citata.

4. Infine osserviamo che se in un dato istante la (10) risulta soddisfatta per ogni versore $\boldsymbol{a}$, consegue che per tutte le rette passanti per O, prese come assi di rotazione, risulta $\boldsymbol{R} \times \Omega_O = 0$; onde, in tal caso, sopra ogni retta uscente da O esisterà il centro d'inerzia e quindi ognuna di tali rette potrà essere un asse di permanente rotazione nei due sensi detti ai nn. 2 o 3. Per stabilire quando accade ciò poniamo:

$$\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{b} + n\boldsymbol{b}_1$$

nella quale $\boldsymbol{b}_1$ sia un versore perpendicolare a $\boldsymbol{b}$. Si ha:

$$\sigma_O \boldsymbol{a} = m\sigma_O \boldsymbol{b} + n\sigma_O \boldsymbol{b}_1;$$

onde se è:

$$\sigma_O \boldsymbol{b} = m_1 \boldsymbol{b} \quad , \quad \sigma_O \boldsymbol{b}_1 = n_1 \boldsymbol{b}_1$$

si ottiene:

$$\boldsymbol{a} \wedge \sigma_O \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}_1;$$

e la (10) risulta soddisfatta qualunque sia il versore $\boldsymbol{a}$.

Le condizioni precedenti esprimono che nelle circostanze considerate la retta OG e tutte le rette ad essa perpendicolari sono assi principali d'inerzia rispetto ad O. Possiamo allora affermare:

1) Se si ha un moto alla Poinsot attorno ad un punto O e se l'ellissoide d'inerzia rispetto ad O del corpo mobile è un ellissoide rotondo, sopra ogni retta per O esisterà il centro d'inerzia; e quindi per ognuna di tali rette si potrà enunciare la proprietà stabilita al n. 2 per quel che concerne la rotazione permanente.

2) Nel caso che il corpo mobile attorno ad O sia pesante, si tratta di un *giroscopio simmetrico* rispetto ad O e si deduce che per esso tutti gli assi uscenti da O sono assi di permanente rotazione nel senso detto al numero precedente.