Bollettino Unione Matematica Italiana

Edoardo Storchi

Uguaglianze fra somme di biquadrati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 220–223.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_220_0>

Uguaglianze fra somme di biquadrati.

Nota di EDOARDO STORCHI (a Milano).

Sunto. - *Si segnalano alcune nuove identità che permettono di risolvere in interi le equazioni* $\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i^4$ $(n = 3,4,5)$. *Si dà inoltre una soluzione in interi dell'equazione* $x^4 = y^4 + z^4 + p^{6n}$ *con* n *dispari.*

Presento nella seguente nota alcune nuove identità atte a risolvere problemi di analisi indeterminata di 4° grado.

Il breve studio riguarda le equazioni:

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^4 + v^4 + w^4 \tag{1}$$

$$x^4 + y^4 + t^4 + s^4 = z^4 + u^4 + v^4 + w^4 \tag{2}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + s^4 = u^4 + v^4 + z^4 + p^4 \tag{3}$$

esprimenti l'uguaglianza fra le somme di 3, 4, 5 biquadrati e le due equazioni:

$$x^4 - y^4 = u^6 + v^6 \tag{4}$$

$$x^4 = y^4 + u^4 + v^6, \tag{5}$$

1. Riassumerò brevemente quanto è noto intorno all'equazione (1).

Si conoscono le seguenti soluzioni:

$$(4av)^4 + (3a^2 - 3d^2 - 2av^2)^4 + (3a^2 - 3d^2 + 2av - v^2)^4 =$$
$$= (4dv)^4 + (3d^2 - 3a^2 - 2dv - v^2)^4 + (3d^2 - 3a^2 + 2d - v^2)^4 \quad (^1)$$
$$[a(d + c) - b(c - 3d)]^4 + [2(bc - ad)]^4 + [a(d - c) - b(c + 3d)]^4 =$$
$$= [a(d - c) + b(c + 3d)]^4 + [2(bc + ad)]^4 + [a(d + c) + b(c - 3d)]^4 \quad (^2)$$
$$(x^4 - 2y^4)^4 + (2x^3y)^4 + (3xy^3)^4 = (x^4 + 2y^4)^4 + (2xy^3)^4 + (xy^3)^4 \quad (^3).$$

Io ho notato le seguenti identità, che non mi risulta siano state finora rilevate, atte a fornire infinite soluzioni numeriche dell'equazione (1):

$$(a)\quad (8x^4 + y^4) + (x^4 - 2y^4)^4 + (2x^3y)^4 = (8x^4 - y^4)^4 + (x^4 + 2y^4)^4 + (8x^3y)^4$$
$$(b)\quad (8x^4 + y^4)^4 + (2xy^3)^4 + (xy^3)^4 = (8x^4 - y^4)^4 + (8x^3y)^4 + (3xy^3)^4$$

la a) per $x = y = 1$ dà: $9^4 + 1^4 + 4^4 = 3^4 + 7^4 + 8^4$ (′)

per $x = 2$, $y = 1$ $24^4 + 31^4 + 4^4 = 8^4 + 16^4 + 33^4$

b) per $x = 2$, $y = 1$: $129^4 + 4^4 + 2^4 = 9^4 + 64^4 + 127^4$. (″)

(1) HALDEMANN, « Math. Magazine », 2, 1904, pagg. 286-288. Ved DICKSON, *History of the Theory of numbers 1934*, vol. II, pagg. 653-657.

(2) U. BINI, *Intermediaire des Math.*, 16, 1900, pag. 83.

(3) GHERARDIN, « Bull. Soc Philomahique », (10) 3. 1911, pag. 236.

Si noti come la b) si possa ottenere per differenza fra la a) e la citata identità di GHERARDIN.

Ho stabilito inoltre un'altra soluzione molto particolare coinvolgente un unico parametro che vi figura come esponente. Essa è la seguente:

$$(c)\qquad (2^{4x-1}+1)^4+(2^x)^4+(2^{x-1})^4=(2^{4x-1}-1)^4+(2^{3x})^4+(3\cdot 2^{x-1})^4$$

per $x=1$, otteniamo la ('), per $x=2$ la (''), per $x=3$:

$$2049^4+8^4+4^4=2047^4+512^4+12^4.$$

2. Ho stabilito un facile metodo per ottenere « infinite » identità che risolvono la (2). Si osservi che qualunque siano a, b, c, d, x, y sussistono le due relazioni:

$$(ax+by)^4+(ax-by)^4-(bx+ay)^4-(bx-ay)^4=$$
$$=2[(ax)^4+(by)^4-(bx)^4-(ay)^4]$$
$$(cx+dy)^4+(cx-dy)^4-(dx+cy)^4-(dx-cy)^4=$$
$$=2[(cx)^4+(dy)^4-(dx)^4-(cy)^4].$$

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$(ax+by)^4+(ax-by)^4+(cx+dy)^4+(cx-dy)^4=$$
$$=(bx+ay)^4+(bx-ay)^4+(dx+cy)^4+(dx-cy)^4=$$
$$=2(x^4-y^4)(a^4+c^4-b^4-d^4).$$

Se i parametri a, b, c, d sono tali da soddisfare l'equazione:

$$(6)\qquad z^4+t^4=u^4+v^4$$

l'ultimo termine della somma al secondo membro dell'identità soprascritta si annulla e la stessa fornisce allora infinite soluzioni dell'equazione proposta. Ora particolari soluzioni dell'equazione (6) si possono ottenere attribuendo valori numerici ai parametri di una nota identità stabilita da EULERO e BINET [1]. In corrispondenza di ciascuna quaderna si ha pertanto una identità che risolve la (2). Così ad esempio:

$$(d)\qquad \begin{aligned}&(133x+158y)^4+(133x-158y)^4+(134x+59y)^4+(134x-59y)^4=\\&=(158x+133y)^4+(158x-133y)^4+(59x+134y)^4+(59x-134y)^4.\end{aligned}$$

$$(e)\qquad \begin{aligned}&(157x+239y)^4+(157x-239y)^4+(227x+7y)^4+(227x-7y)^4=\\&=(239x+157y)^4+(239x-157y)^4+(7x+227y)^4+(7x-227y)^4.\end{aligned}$$

[1] HARDY and WRIGHT, *An introduction to the Thyeory of numbers*, pag 202. Vedasi anche il recente lavoro di B. SEGRE, *On aritmetical properties of quartie surfaces*, (« Proceedings of the London mathematical society », Series 2, Vol. 49, Part. 5, 1947) nel quale è trattata dal punto di vista della moderna geometria aritmetica algebrica l'analisi indeterminata di 4° grado.

$$(f)\quad \begin{aligned}&(257x - 192y)^4 + (257x - 292y)^4 + (256x + 193y)^4 + (256x - 193y)^4 = \\ &= (292x + 257y)^4 + (292x - 257y)^4 + (193x + 256y)^4 + (193x - 256y)^4.\end{aligned}$$

3. Relativamente all'equazione (3) ho notato la seguente semplice identità:

$$(g)\quad \begin{aligned}&(a^4 - 2b^4)^4 + (2a^3b)^4 + (3ab^3)^4 + (a^4 + 8b^4)^4 + (2a^4 - b^4)^4 = \\ &= (a^4 - 8b^4)^4 + (2a^4 + b)^4 + (8ab^3)^4 + (a^4 + 2b^4)^4 + (ab^3)^4.\end{aligned}$$

Per $a = b = 1$ fornisce: $1^4 + 2^4 + 9^4 = 3^4 + 7^4 + 8^4$.

» $a = 2$, $b = 1$: $14^4 + 6^4 + 24^4 + 31^4 = 8^4 + 33^4 + 18^4 + 2^4$

» $a = 1$ $b = 2$ $129^4 + 31^4 + 24^4 + 14^4 + 4^4 = 127^4 + 64^4 + 33^4 + 18^4 + 8^4$.

4. Voglio qui pure segnalare una nuova identità che risolve l'equazione:

$$x^4 + y^4 = z^4 + t^4 + s^4 + u^4 + v^4 + w^4.$$

Essa è la seguente:

$$(h)\quad (a^2b^2)^4 + (a^4 + 4b^4)^4 = (a^4)^4 + (2a^3b)^4 + (3a^2b^2)^4 + (2a^2b^2)^4 + (4ab^3)^4 + (4b^4)^4.$$

Per $a = b = 1$; per $a = 1$, $b = 2$ dà le note (1) relazioni:

$$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$$
$$65^4 = 64^4 + 32^4 + 12^4 + 8^4 + 1^4.$$

Per $a = 3$, $b = 1$:

$$84^4 + 9^4 = 81^4 + 54^4 + 27^4 + 18^4 + 12^4 + 4^4$$

per $a = 1$, $b = 3$:

$$9^4 + 325^4 = 1^4 + 6^4 + 18^4 + 27^4 + 108^4 + 324^4.$$

5. Chiuderò infine segnalando una semplice identità che è atta a risolvere il problema, in apparenza arduo, di determinare due quarte potenze la cui differenza sia la somma di due seste potenze.

In tale identità viene coinvolto un solo parametro che vi figura come esponente; essa è la seguente:

$$(i)\quad [2^{3(4x+1)} + 1]^4 - [2^{3(4x+1)} - 1]^4 = [2^{2(3x+1)}]^6 + [2^{2x+1}]^6.$$

Per $x = 0$, essa fornisce la relazione:

$$9^4 - 7^4 = 4^6 + 2^6$$

(1) FAUQUEMBERGUE, *L'Intermediaire des Math.*, 5 (1898), pag. 34; A. MARTIN e D. S. HART, « Math. Magazine », 2 (1896), pag. 173-84; vedi DICKSON, « History », pag. 650.

già vista sotto altra forma; per $x = 1$, si ha:

$$32769^4 - 32767^4 = 256^6 + 8^6$$

Scrivendo la (i) nel modo seguente:

$$(l) \qquad [2^{3(4x+1)} + 1]^4 = [2^{3(4x+1)} - 1]^4 + [2^{3(3x+1)}]^4 + 2^{6(2x+1)}$$

si vede come essa sia atta a risolvere il problema, a prima vista complesso, espresso dall'equazione:

$$(7) \qquad x^4 = y^4 + z^4 + t^{6n}$$

con n dispari ([1]).

Così l'ultima relazione numerica può scriversi:

$$32769^4 = 32767^4 + 4096^4 + 2^{18}$$

e ancora:

$$(2^{27} + 1)^4 = (2^{27} - 1)^4 + (2^{21})^4 + (2^5)^6.$$