Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Su alcune proprietà di particolari serie doppie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 228–236.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_228_0>

Su alcune proprietà di particolari serie doppie.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si studiano particolari serie doppie che generalizzano formalmente le serie semplici ordinarie di* DIRICHLET.

Nella presente Nota tratto le serie doppie del tipo [1]

$$(1) \qquad \sum_{m,\,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^s + m^t}$$

dove s, t sono due variabili complesse e le $a_{m,n}$ costanti numeriche. Queste serie hanno qualche analogia formale con le serie semplici ordinarie di DIRIHLET

$$(2) \qquad \sum_{n>0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

La più naturale generalizzazione di queste ultime sarebbe invero costituita dalle serie doppie del tipo:

$$(3) \qquad \sum_{m,\,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^s \cdot m^t}$$

le quali, peraltro, sono già state diffusamente studiate [2].

Mostrerò che vi è qualche analogia, nelle proprietà di convergenza, fra le (1) e le (2) che è però di natura differente dall'analogia che intercorre fra le (2) e le (3). Ciò appare esser dovuto al fatto che l'operazione di elevazione a potenza è associativa rispetto alla moltiplicazione, ma non rispetto all'addizione.

Nel mio studio mi ispirerò ai metodi impiegati nello studio della convergenza delle serie (2). Questi metodi sono esposti, fra altre opere, in quelle di VALIRON e di HARDY e RIESZ [3].

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) Lo studio di queste serie mi è stato proposto dal prof. G. CIMMINO, che ringrazio sentitamente per i suoi consigli e suggerimenti.

(2) Citerò fra gli altri i seguenti lavori: T. KOJIMA, « Sci. Rep. Tôhoku University », 9 (1920) 351-400; N. TAKAGI, « Tôhoku Math. J. », vol. 43. (1937), pag. 58; J. G. HERRIOT, « Bull. Am. Ma h. Soc. », 46, (1940), 920-29,

(3) VALIRON, *Théorie generale des series de Dirichlet*. Paris, 1927. HARDY and RIESZ, *The general theory of Dirichlet' sseries*. Cambridge, 1915.

1. L'espressione (1) può non avere senso; per certi valori di s e t e delle costanti $a_{m,n}$. Importa innanzi tutto vedere quando ciò avvenga.

Poniamo:

$$s = \sigma + i\xi, \qquad t = \tau + i\eta$$

Le coppie di valori (s, t) si potranno rappresentare con i punti di uno spazio a quattro dimensioni $(\sigma, \tau, \xi, \eta)$. Si ha in primo luogo il seguente:

TEOREMA I. – a) *Se le costanti* $a_{m,n}$ *di* (1) *sono tutte differenti da zero a partire da certi* m_0 ed n_0 *allora la* (1) *non ha senso in infiniti punti, ovunque densi della regione* $\sigma\tau > 0$.

b) *La* (1) *ha senso in ogni punto della regione* $\sigma\tau < 0$, *le costanti* $a_{m,n}$ *essendo qualsiansi.*

Dimostro che: dati ad arbitrio ξ_0, η_0, σ_0, τ_0 con $\sigma\tau > 0$ vi sono infinite coppie σ, τ, prossime a σ_0, τ_0 e ξ, η prossime a ξ_0, η_0 per cui è:

$$| n^s + m^t | = 0$$

con n e m grandi quanto si voglia e quindi, se il corrispondente coefficiente $a_{m,n}$ è $\neq 0$, in quei punti la (1) non ha senso. Se invece è $\sigma_0\tau_0 < 0$, allora è sempre:

$$| n^s + m^t | \neq 0$$

e la (1) ha sempre senso.

Abbiamo

$$n^s = n^\tau e^{i\xi} \log n, \qquad m^t = m^\tau e^{i\eta} \log m \tag{4}$$

$$| n^s + m^t | = n^{2\sigma} + m^{2\tau} + 2 n^\sigma m^\tau \cos | \xi \log n - \eta \log m | \tag{5}$$

e sarà:

$$| n^s + m^t | = 0$$

se:

$$(i) \qquad | \xi \log n - \eta \log m | = (2K + 1)\pi$$

$$(ii) \qquad n^\sigma = m^\tau \qquad (K \text{ intero})$$

per gli stessi m ed n. La condizione (ii) non può essere soddisfatta per una coppia σ_0, τ_0 con $\sigma_0\tau_0 < 0$. Da ciò segue la parte *b*) del Teorema.

Supponiamo dunque $\sigma\tau > 0$. In tal caso è σ/τ e supponiamo inoltre che questo rapporto abbia un valore razionale:

$$\sigma/\tau = p/q \qquad (p \text{ e } q \text{ interi } > 0)$$

allora tutte le soluzioni della (ii) saranno date da:

$$m = k^p \qquad n = k^q \qquad (k \text{ intero} > 0, \text{ arbitrario}).$$

Occorre ora vedere se qualcuna di queste infinite coppie di interi (m, n) è tale da soddisfare la (i) dove ξ e η si prendano opportunamente. Dico che si possono trovare ξ e η vicini quanto si vuole agli ξ_0 e η_0 assegnati e tali che con essi si possa soddisfare la ( ) nelle condizioni anzidette.

Nel piano rappresentativo delle coppie (ξ, η), tutte le coppie di valori (punti) che soddisfano la (i) con n_0, m_0, K_0 stanno sulle due rette

$$|\xi \log n_0 - \eta \log m_0| - (2K_0 + 1)\pi = 0. \tag{6}$$

Per dimostrare quanto ho asserito, farò vedere che si può far passare una delle rette del sistema (i) vicino quanto si vuole al punto (ξ_0, η_0) assegnato, chè allora (ξ, η) sarà il punto di questa retta che è più prossimo a (ξ_0, η_0). È sottinteso che la coppia (m, n) relativa a questa retta deve essere presa fra quelle che soddisfano la (ii).

La distanza di (ξ, η) da una retta (i) è

$$d = \frac{|\xi \log n - \eta \log m| - (2K + 1)\pi}{\sqrt{(\log n)^2 + (\log m)^2}} = \frac{D}{\sqrt{(\log n)^2 + (\log m)^2}}. \tag{7}$$

Siano $n = k^q$, $m = k^q$ (k arbitrario); prendiamo allora k così grande che sia:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{(\log n)^2 + (\log m)^2}} < \varepsilon \qquad (\xi \text{ arbitrario} > 0$$

(ciò varrà anche per tutti i k successivi), prendiamo poi K dato da:

$$K = E\left(\frac{|\log n - \eta \log m| - \pi}{2\pi}\right) \quad (E(\ldots) = \text{parte intera di} \ldots)$$

dove n ed m hanno i valori detti. Sarà:

$$|(2K + 1)\pi - |\xi \log n - \eta \log m|| \leq 2\pi$$

e quindi:

$$|D| \leq 2\pi$$

cioè:

$$d < \varepsilon.$$

Riassumendo: il campo C sia tale che per i suoi punti è $\sigma\tau > 0$. Sia $P_0(\sigma_0, \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ un punto qualsiasi di C. Si può trovare σ, τ vicini quanto si vuole a σ_0, τ_0, e tali che σ/τ sia razionale. Si può poi trovare ξ, η vicini quanto si vuole a ξ_0, η_0 e tali che per essi e per σ, τ le due condizioni (i) e (ii) siano soddisfatte dalla stessa coppia (m, n) con m e n grandi quanto si vuole.

Si conclude che in $P(\sigma, \tau, \xi, \eta)$ vicino quanto si vuole a P_0 dato, la (1) non ha senso, se gli $a_{m,n}$ sono tutti differenti da zero a partire da certi n_0 e m_0. Che i punti P siano dappertutto densi segue facilmente dalla dimostrazione che ho data.

Il Teorema I è quindi dimostrato.

Osservazione. – L'espressione (1) ha sempre significato nel caso che sia $\sigma\tau = 0$, ma non $\sigma = 0$ e $\tau = 0$ contemporaneamente. In quest'ultimo caso l'espressione non ha senso se tutti gli $a_{m,n}$ sono differenti da zero a partire da certi m_0, n_0. Ciò si vede agevolmente seguendo il metodo che ho usato.

2. I seguenti ulteriori risultati si dimostrano agevolmente in base al Teorema I ed agli argomenti per esso adoperati (cioè considerando sempre la i e la (ii)). Mi limito quindi ad enunciarli:

Teorema II. – *Perchè l'espressione* (1) *abbia senso in tutti i punti di un intorno di un punto* σ_0, τ_0, ξ_0, η_0 *dello spazio* (σ, τ, ξ, η) *per cui sia sempre:*

$$0 < \beta < \sigma/\tau < \alpha$$

oppure sempre:

$$\sigma/\tau > \alpha \quad o \quad 0 < \frac{\sigma}{\tau} < \beta$$

occorre e basta che in essa (1) *manchino tutti i termini con*

$$E(n^\beta) \leq m \leq E(n^\alpha)$$

o rispettivamente quelli con

$$m > E(n^\alpha) \quad o \quad n < m \leq E(n^\beta).$$

La dimostrazione si fa osservando che nelle condizioni del Teorema la (ii) non può venir soddisfatta e che d'altra parte se vi è in (1) qualcuno dei termini con $E(n^\beta \leq m \leq E(n^\alpha)$, oppure con con $m \geq E(n^\alpha)$ o $0 < m \leq E(n^\beta)$ la (ii) e la (i) possono venir soddisfatte in un punto dell'intorno detto.

Corollario: *Se la regione* C, *estesa in tutte quattro le dimensioni, è tale che per i suoi punti il rapporto* σ/τ *acquista tutti i valori da* 0 *a* $+\infty$ *allora l'espressione* (1) *non può avere significato per tutti i punti di* C *a meno di ridursi ad un sol termine.*

Coi Teoremi (1) e (2) ed il corollario restano determinati tutti i casi in cui l'espressione (1) ha senso in tutti i punti dell'intorno di un punto.

Mi occuperò nel seguito della convergenza delle serie (1) quando non si facciano ipotesi sugli $a_{m,n}$ e le considererò soltanto in regioni in tutti i punti delle quali esse hanno senso.

3. Passo ora a studiare la convergenza delle (1) (nel caso detto) nel senso di Stolz e Pringsheim.

Perciò mi servo di una formula che generalizza una ben nota formula di ABEL e che si può ottenere appunto applicando questa ripetutamente [4].

Pongo:

$$\Delta_1 B_{n,m} = B_{n,m} - B_{n+1,m}$$
$$\Delta_2 B_{n,m} = B_{n,m} - B_{n,m+1}$$
$$\Delta_1\Delta_2 B_{n,m} = \Delta_2\Delta_1 B_{n,m} = B_{n,m} - B_{n+1,m} - B_{n,m+1} + B_{n+1,m+1}$$

La formula è allora:

$$\sum_{p}^{q}{}_n \sum_{p'}^{q'}{}_m A_{n,m}B_{n,m} =$$
$$(8)\qquad = \sum_{p}^{q-1}{}_n \sum_{p'}^{q'-1}{}_m \left\{ \Delta_1\Delta_2 B_{n,m} \sum_{p}^{n}{}_\nu \sum_{q}^{m}{}_\mu A_{\nu,\mu} \right\} + \sum_{p}^{q-1} \left\{ \Delta_1 B_{n,q'} \sum_{p'}^{q'}{}_\mu \sum_{p}^{n}{}_\nu A_{\nu,\mu} \right\} +$$
$$+ \sum_{p'}^{q'-1}{}_m \left\{ \Delta_2 B_{q,m} \sum_{p}^{q}{}_\nu \sum_{p'}^{m}{}_\mu A_{\nu,\mu} \right\} + B_{q,q'} \sum_{p}^{q}{}_\nu \sum_{p'}^{q'}{}_\mu A_{\nu,\mu}.$$

Con l'aiuto di queste formule posso studiare la convergenza semplice della (1) quando si supponga che detta serie converga per $s = s_0$ e $t = t_0$ tali che

$$\sigma_0 \geq 0, \qquad \tau_0 \leq 0 \qquad (\text{o} \quad \sigma_0 \leq 0, \qquad \tau_0 \geq 0)$$

cioè converga:

$$\sum_{m,n>1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0} + m^{t_0}}.$$

Occorre prima dimostrare due Lemmi:

LEMMA I. - *Se la serie:*

$$a) \qquad \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0} + m^{t_0}}$$

converge ed è

$$\sigma_0 \geq 0, \qquad \tau_0 \leq 0 \qquad (\text{o} \quad \sigma_0 \leq 0, \qquad \tau_0 \geq 0)$$

e $|s_0|$, σ_0, $|t_0|$, t_0 *tutti* $\neq$ *o oppure tutti nulli, allora converge pure la serie:*

$$b) \qquad \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}}, \qquad \left(o \quad \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^{t_0}}\right).$$

Viceversa, se la b) *converge ed è:*

$$\sigma_0 \geq 0, \qquad (o \quad \tau_0 \geq 0)$$

[4] Si veda p. es.: C. MOORE, *Summable series and convergence factors*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. XXII

allora converge la a) *per ogni* t_0 *(o* s_0*) con:*

$$\tau_0 \leq 0 \qquad (o \quad \sigma_0 \leq 0)$$

ed $|s_0|$, σ_0, $|t_0|$, τ_0 *tutti* $\neq 0$ *oppure tutti nulli.*

1° - È:

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}} = \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \cdot \frac{n^{s_0}+m^{t_0}}{n^{s_0}} = \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \cdot \left(1+\frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}\right).$$

E poichè la $a)$ converge basterà dimostrare che converge la:

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \cdot \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}$$

e per questo, dimostrare che, per ogni $p(< q)$, $p'(> q')$ abbastanza grandi è:

$$\left| \sum_{p}^{p}{}_{n} \sum_{p'}^{p'}{}_{m} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \right| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0, \text{ arbitrario}). \tag{9}$$

Applichiamo la formula (8) al primo membro della (9); si avrà:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p}^{p}{}_{n} \sum_{p'}^{q'}{}_{m} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \cdot \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \right| = \Bigg| & \sum_{p}^{q-1}{}_{n} \sum_{p'}^{q'-1}{}_{m} \left\{ \Delta_1\Delta_2 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \cdot \sum_{p}^{n}{}_{\nu} \sum_{p'}^{m}{}_{\mu} \frac{a_{\mu,\nu}}{\nu^{s_0}+\mu^{t_0}} \right\} + \\ & + \sum_{p}^{q-1}{}_{n} \left\{ \Delta_1 \frac{q'^{t_0}}{n^{s_0}} \sum_{p'}^{q'}{}_{\mu} \sum_{p}^{n} \frac{a_{\mu,\nu}}{\nu^{t_0}+\mu^{s_0}} \right\} + \sum_{p'}^{q'-1} \left\{ \Delta_2 \frac{m^{t_0}}{q^{s_0}} \sum_{p}^{q}{}_{\nu} \sum_{p'}^{m}{}_{\mu} \frac{a_{\mu,\nu}}{\nu^{s_0}+\mu^{t_0}} \right\} + \\ & + \frac{q'^{t_0}}{q^{s_0}} \cdot \Sigma_{\nu} \, \Sigma_{\mu} \frac{a_{\mu,\nu}}{\nu^{s_0}+\mu^{t_0}} \Bigg| . \end{aligned} \tag{10}$$

Ma essendo convergente la $a)$, tutte le somme doppie estese a termini $\frac{a_{\mu,\nu}}{\nu^{s_0}+\mu^{t_0}}$ sono, per p e p' sufficientemente grandi, minori di $\varepsilon_1 > 0$ arbitrario.

Esaminiamo inoltre:

$$\left| \Delta_1 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \right|; \qquad \left| \Delta_2 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \right|; \qquad \left| \Delta_1\Delta_2 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}} \right|.$$

Tenendo conto che:

$$\left| \frac{1}{n^{s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s_0}} \right| \leq \left| \frac{\sigma_s}{s_0} \right| \cdot \left[\frac{1}{n^{\sigma_0}} - \frac{1}{(n+1)^{\sigma_s}} \right]$$

e

$$| m^{t_0} - (m+1)^{t_0} | \leq \left| \frac{t_0}{\tau_0} \right| \, | (m+1)^{\tau_0} - m^{\tau_0} |$$

(per la dimostrazione vedi VALIRON o HARDY-RIESZ, op. cit.) si ottiene agevolmente:

$$\left|\Delta_1 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}\right| \leq \left|\frac{\sigma_0}{s_0}\right| \left|\Delta_1 \frac{m^{\tau_0}}{n^{\sigma_0}}\right|$$

$$\left|\Delta_2 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}\right| \leq \left|\frac{t_0}{\tau_0}\right| \left|\Delta_2 \frac{m^{\tau_0}}{n^{\sigma_0}}\right|$$

$$\left|\Delta_1\Delta_2 \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}\right| \leq \left|\frac{s_0 t_0}{\sigma_0\tau_0}\right| \left|\Delta_1\Delta_2 \frac{m^{\tau_0}}{n^{\sigma_0}}\right|$$

Prendendo in (10) la somma dei valori assoluti e tenendo conto di quanto si è detto, e inoltre chiamando K il maggiore fra $\left|\frac{s_0}{\sigma_0}\right|$ e $\left|\frac{t_0}{\tau_0}\right|$ si avrà:

$$\left|\sum_{p}^{q}{}_n \sum_{p'}^{q'}{}_m \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} \cdot \frac{m^{t_0}}{n^{s_0}}\right| < \varepsilon_1 K^2 \sum_{p}^{q-1}{}_n \sum_{p'}^{q'-1}{}_m \Delta_1\Delta_2 \frac{m^{\tau_0}}{n^{\sigma_0}} + \varepsilon_1 K \sum_{p}^{q-1}{}_n \Delta_1 \frac{q'^{\tau_0}}{n^{\sigma_0}} +$$

$$+ \varepsilon_1 K \sum_{p'}^{q'-1}{}_m \Delta_2 \frac{m^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} + \varepsilon_1 \frac{q'^{\tau^0}}{q^{\sigma_0}} = \varepsilon_1 K^2 \frac{p'^{\tau_0}}{p^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K^2 \frac{q'^{\tau_0}}{p^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K^2 \frac{p'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} +$$

$$+ \varepsilon_1 K^2 \sum_{p'}^{q'-1}{}_m \Delta_2 \frac{m^{\tau_0}}{q^{\sigma^0}} + \varepsilon_1 \frac{q'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} = \varepsilon_1 K^2 \frac{p'^{\tau_0}}{p^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K^2 \frac{q'^{\tau_0}}{p^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K^2 \frac{p'^{\tau_0}}{q^{\sigma^0}} + \varepsilon_1 K \cdot \frac{q'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} +$$

$$+ \varepsilon_1 K \frac{q'^{\tau_0}}{p^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K \frac{q'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} + \varepsilon_1 K \frac{p'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} - \varepsilon_1 K \frac{q'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}} + \varepsilon_1 \frac{q'^{\tau_0}}{q^{\sigma_0}},$$

e si vede chiaramente che per p, p' abbastanza grandi e $q > p$, $q' > p'$ si può rendere questa espressione $< \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrario).

2°. - Per dimostrare la seconda parte del Lemma si procede in modo analogo, partendo da:

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}+m^{t_0}} = \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}} \cdot \frac{n^{s_0}}{n^{s_0}+m^{t^0}}$$

e modificando convenientemente i passaggi.

Lemma II. - *Se la serie doppia:*

$$a) \qquad \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}} \qquad \text{dove} \qquad \sigma \geq 0$$

converge, allora la serie doppia:

$$b) \qquad \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s}}$$

converge per tutti gli s *con* $\sigma \geq \sigma_0$ *purchè* $|s|$, σ, $|s_0|$, σ_0 *siano tutti* $\neq 0$ *oppure tutti nulli.*

È:

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s}} = \sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^{s_0}} \cdot \frac{n^{s_0}}{n^{s}}.$$

Si applica la formula (8) al secondo membro e si procede in modo simile a quello usato per il Lemma I.

Abbiamo ora il:

TEOREMA III. - *Se la serie doppia*

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^s + mt}$$

converge per $s = s_0$ *con* $\sigma_0 \geq 0$, $\tau_0 \leq 0$ (*o* $\sigma_0 \leq 0$, $\tau_0 \geq 0$) *essa convergerà pure per ogni* s *e* t *con* $\sigma \geq \sigma_0$, $\tau \leq 0$ ($\sigma \leq 0$, $\tau \geq \tau_0$) *e* $|s|$, σ, $|t|$, τ *tutti* $\neq 0$ *o tutti nulli. La convergenza sarà uniforme in ogni regione dello spazio* (σ, τ, ξ, η) *tutti i punti* (s, t) *della quale soddisfino alle dette condizioni.*

La dimostrazione, che non svolgo in dettaglio essendo agevole, si svolge applicando ripetutamente i due Lemmi dimostrati.

Un Teorema analogo al III si ha riguardo alla convergenza assoluta:

TEOREMA IV. - *Se la serie doppia:*

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^s + m^t}$$

convergente assolutamente per $s = s_0$ *e* $t = t_0$ *con* $\sigma_0 \geq 0$, $\tau_0 \leq 0$ (*o* $\sigma_0 \leq 0$, $\tau_0 \geq 0$) *essa converge pure assolutamente e uniformemente per ogni* s *e* t *con:*

$$\sigma \geq \sigma_0, \qquad \tau \leq 0, \qquad (o \quad \sigma \leq 9, \qquad \tau \geq \tau_0).$$

La dimostrazione è pressochè immediata quando si tenga conto della:

$$\frac{2}{n^{\sigma_0}} \geq \frac{1}{|n^{s_0} + m^{t_0}|} \geq \frac{1}{2n^{\sigma_0}}$$

mediante la quale si può vedere che la serie dei valori assoluti della (1) si comporta come la serie:

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{|a_{m,n}|}{n^{\tau}}$$

e da qui discende il Teorema.

Mediante i teoremi III e IV e col ragionamento ben noto di DEDEKIND si ha il seguente:

TEOREMA V. - *Data la serie doppia:*

$$\sum_{m,n>0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{n^s + m^t}$$

esiste un numero reale σ^* (*o* τ^*), ($0 \leq \sigma^* \leq +\infty$, $0 \leq \tau^* \leq +\infty$) *tale che, variando* s *e* t *in una regione per i cui punti è* $\sigma\tau \leq 0$ *la serie* (1) *converge certo per* $\sigma > \sigma^*$ *e* $\tau \leq 0$ (*oppure* $\sigma \leq 0$, $\tau > \tau^*$) *e certamente non converge per* $\sigma < \sigma^*$ *e* $\tau \leq 0$ (*oppure* $\sigma \leq 0$, $\tau < \tau^*$). *Dove converge*

converge altresì uniformemente purchè siano $|s|$, σ, $|t|$, τ *tutti* $\neq 0$ *oppure tutti nulli*

Esistono inoltre due numeri $\overline{\sigma^*}$ *o* $\overline{\tau^*}$ *aventi le analoghe proprietà riguardo alla convergenza assoluta.*

Si potrebbero costruire esempi di serie per cui σ^* o τ^* hanno qualsiasi valore fra quelli che essi sono suscettibili di prendere. Ma non mi dilungherò su ciò, perchè queste costruzioni si fanno senza difficoltà guidandosi cogli esempi già costruiti per le serie ordinarie di DIRICHLET (per es. in HARDY-RESZ, op. cit.).

4. I campi di convergenza fin qui trattati sono tali che per i loro punti è $\sigma\tau < 0$ e quindi le serie (1) hanno senso in tutti i punti di tali campi, qualsiasi possano essere gli $a_{m,n}$.

Per una serie (1) che converge per $s = s_0$ e $t = t_0$ con $\sigma_0\tau_0 > 0$ il metodo che ho usato non dà nessun risultato. Esso permette soltanto di vedere che per una tale serie non è sufficiente il fatto che essa converga in un punto di un campo (in ogni punto del quale essa abbia senso) per poterne dedurre la convergenza in altra parte del campo. Per tali serie converrà quindi usare altri metodi partendo da altre ipotesi.