Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ugo Dal Buono

Risoluzione di un classico problema

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 248–250.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_248_0>

Risoluzione di un classico problema.

Nota di UGO DAL BUONO (a Reggio di Calabria).

Sunto. - *Si risolve un classico problema, tenendo conto della moderna teoria sul moto dei corpi a massa variabile.*

Il seguente classico problema, proposto nella « Dinamics » di TAIT e STEELE (1853), è stato risoluto ivi considerando la massa costante.

Ora, scopo della presente nota è quello di risolverlo tenendo conto che invece la massa è variabile ([1]). Il problema in questione, con la relativa nuova risoluzione, è il seguente:

Suppongasi che una catenella omogenea, di lunghezza totale l, sia avvolta sopra una piccola puleggia, priva di attrito, pendendo

([5]) Queste soluzioni si trovano ad esempio riunite in O. BELLUZZI. *Scienza delle Costruzioni*, cap. XXVI, par. 627.

([3]) GINO LORIA, Op. cit., vol. I, pagg. 364-65.

([1]) Sui moti a massa variabile, in genere, si è occupato il prof. LEVI-CIVITA nelle note 1ª *Sul moto di un corpo a massa variabile*, (« Rend. Acc. dei Lincei », vol. VIII, serie 6ª, 2° sem., fasc. 9°. Roma, nov. 1928); 2ª) *Aggiunta alla nota sul moto di un corpo a massa variabile* (l. c., fasc 12°. Roma dic. 1928) ed il prof. SOMMERFELD in « Mechanik », vol. I, pag. 28.

da una parte liberamente, con l'estremo inferiore in A, per una lunghezza variabile x; dall'altra parte penda pure per una lunghezza costante k fino ad un sostegno piano orizzontale su cui rimane accumulata la parte residua, di lunghezza $l - x - k$, in un mucchio sinteticamente assimilato nel punto P.

Si ammetta che l'unica forza in gioco sia il peso, e, se all'inizio è $x > k$, il moto di discesa della catenella si inizi dalla quiete.

Si denoti con ν la densità lineare della catenella e con $v = \dfrac{dx}{dt}$ la velocità di svolgimento della medesima, che è poi quella del punto A. Siccome si immagina che l'estremo in P della catenella sia ancorato al sostegno, risulta $k = \text{cost}$. Incominciamo col tenere conto della tensione T che il tratto lungo k della catenella risente per il collegamento con la parte accumulata. Riferiamoci alle componenti dei vettori in questione su un asse verticale orientato all'insù.

Per porre in equazione il problema si introduce la reazione verticale R che la catenella subisce per effetto della puleggia e si applica il *teorema delle quantità di moto (o dell'impulso)* rispetto, come si è detto, alla verticale separatamente nei due tratti di catenella:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\nu k v) = R - T - \nu k g \\ -\dfrac{d}{dt}(\nu x v) = R - \nu x g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu k \dot{v} = R - T - \nu k g \\ -\nu x \dot{v} - \nu v \dot{x} = R - \nu x g \end{cases} \qquad (\dot{x} = v).$$

Sottraendo membro a membro, si deduce:

$$\nu(x + k)\dot{v} + \nu v^2 = -T + \nu g(x - k). \tag{1}$$

La tensione T risulta data da: $T = \nu v^2$ (²), per cui, sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\nu(x + k)\dot{v} + \nu v^2 = -\nu v^2 + \nu g(x - k)$$

e cioè:

$$(x + k)\dot{v} + 2v^2 = g(x - k). \tag{2}$$

Scriviamo la (2) sotto la forma:

$$(x + k)\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + 2v^2 = g(x - k).$$

(²) Vedi: LEVI-CIVITA, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II, parte prima, pag. 421. (Zanichelli, Bologna 1926), dove vi è la risoluzione del problema in esame, ritenendo però la massa costante.

Posto $v' = \frac{dv}{dx}$, si deduce l'equazione differenziale:

$$(x + k)vv' + 2v^2 = g(x - k).$$

Si ha:

$$\frac{1}{2}(x + k)2vv' + 2v^2 = g(x - k)$$

$$\frac{1}{2}(x + k)(v^2)' + 2v^2 = g(x - k).$$

Poniamo $v^2 = y$; si ottiene:

$$\frac{1}{2}(x + k)y' = -2y + g(x - k).$$

Siamo così pervenuti ad un'equazione lineare di 1° ordine:

$$y' = -\frac{4}{x + k}y + 2g\frac{x - k}{x + k},$$

il cui integrale generale è:

$$y = 2ge^{-4\int\frac{dx}{x+k}}\left(\int e^{4\int\frac{dx}{x+k}}\frac{x - k}{x + k}dx + C\right).$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene:

$$v^2 = 2g\left[\frac{2x - 3k}{10} + \frac{C}{(x + k)^4}\right]. \tag{3}$$

La costante C, che comparisce nella (3), viene stabilita fissando le condizioni all'origine del moto.

Si noti che invece, trascurando la variabilità della massa, si perviene alla nota risoluzione del problema in esame [3]

$$v^2 = 2g\frac{x^3 - 3k^2x + C}{3(x + k)^2}.$$

[3] Vedi LEVI-CIVITA, *Lezioni di meccanica razionale*, (l. c.).