Bollettino Unione Matematica Italiana

M. Casarini

Sul pendolo conico di lunghezza variabile

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 251–255.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sul pendolo conico di lunghezza variabile.

Nota di M. CASARINI [1] (a Mantova).

Sunto. - *Si dimostra che, in generale, la traiettoria, inizialmente circolare, di un pendolo conico (spostato di poco dalla posizione verticale) si altera diventando ellittica, in seguito ad una variazione della lunghezza del pendolo stesso. La traiettoria rimane però in circolare se quella variazione è adiabatica.*

§ **1.** A pag. 156 del trattato di dinamica di S. TIMOSHENKO e di D. H. YOUNG [2] è proposto, in sostanza, il seguente esercizio:

« Una pallina, di peso noto, attaccata ad un filo AO, gira, con velocità costante, in una traiettoria circolare di raggio r, giacente in un piano orizzontale. Tirando un capo del filo, la pallina viene portata nella posizione A' dove descrive un cerchio di raggio $\frac{r}{2}$. Trovare lo spostamento verticale del capo del filo se la lunghezza iniziale OA è l ».

In altre parole, nell'esercizio proposto, si considera un pendolo conico che si muove inizialmente percorrendo una traiettoria circolare di raggio r; si altera poi la lnnghezza del filo fino ad ottenere un altro pendolo conico per cui la traiettoria sia ancora circolare e di raggio $\frac{r}{2}$; si richiede di quanto è stata alterata la lunghezza del pendolo.

L'esercizio si risolve facilmente applicando il teorema del momento della quantità di moto; però non si può affermare, senza ulteriori condizioni, che alterando la lunghezza di un pendolo conico di traiettoria circolare, ne risulti un altro pendolo conico di traiettoria pure circolare.

In questo lavoro, considerando però solo le piccole oscillazioni, si proverà, con un esempio, che la traiettoria di un pendolo conico, dopo l'alterazione della sua lunghezza, non è, in generale, circolare anche se lo era inizialmente.

Essa però rimane circolare nel caso di una variazione della lunghezza del filo infinitamente lenta e graduale, cioè, come si suol dire, adiabatica.

[1] Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

[2] Cfr. S. TIMOSHENKO e D. H. YOUNG, ***Engineering Mechanics-Dynamics***. Mac. Graew-Hill, 1937.

§ **2.** Riferito il pendolo conico P di massa M e lunghezza l (con l eventualmente variabile) ad un sistema di coordinate cartesiane x, y, z con origine nel punto d'attacco del filo, centro della sfera su cui si muove il pendolo quando l è costante, e con l'asse z verticale e rivolto verso il basso, fra le coordinate x, y, z del punto P vale la relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \tag{1}$$

Allora, per il principio di d'ALEMBERT, tenuto presente che l'unica forza che agisce sul pendolo è il suo peso Mg, si ha:

$$-\ddot{x}\delta x - \ddot{y}\delta y - (\ddot{z} - g)\delta z = 0. \tag{2}$$

Differenziando la (1) si trova:

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0. \tag{3}$$

Moltiplichiamo la (3) per il moltiplicatore di LAGRANGE λ, e sommiamo con la (2):

$$(-\ddot{x} + \lambda x)\delta x + (-\ddot{y} + \lambda y)\delta y + (-\ddot{z} + g + \lambda z)\delta z = 0. \tag{4}$$

Poichè la (4) deve essere verificata per tutti i valori di δx, δy, δz, sarà:

$$\begin{aligned} -\ddot{x} + \lambda x &= 0 \\ -\ddot{y} + \lambda y &= 0 \\ -\ddot{z} + g + \lambda z &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Da quest'ultima ricaviamo λ:

$$\lambda = -\frac{g - \ddot{z}}{z}. \tag{6}$$

Poichè ci limitiamo a considerare solo le piccole oscillazioni, il moto del pendolo P si identifica con quello della sua proiezione sul piano xy, cioè si potrà supporre, a meno di termini trascurabili, $z = l$ e quindi $\ddot{z} = \ddot{l}$. L'espressione di λ diventa:

$$\lambda = -\frac{g - \ddot{l}}{l} \tag{7}$$

e perciò, ancora a meno di termini trascurabili:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y \tag{8}$$

avendo posto

$$\omega^2 = \frac{g - \ddot{l}}{l} \tag{8'}$$

ω è variabile col tempo quando è tale la lunghezza del pendolo.

§ 3. Supponiamo ora, per fissare le idee, ω costante fuori dell'intervallo $(0, t_1)$ e in questo intervallo variabile con la legge:

$$\omega = \frac{k}{t+m} \tag{9}$$

dove k ed m sono costanti.

È facile vedere che ω varia in $(0, t_1)$, secondo la (9), quando l varia, nello stesso intervallo di tempo con la legge:

$$l = \frac{g(t+m)^2}{2+k^2}. \tag{10}$$

Infatti sostituendo questo valore nell'espressione (8') si attiene per ω il valore (9).

Con tale scelta di ω le (8) diventano per $0 \leq t \leq t_1$,

$$\ddot{x} = -\frac{k^2}{(t+m)^2} x; \qquad \ddot{y} = -\frac{k^2}{(t+m)^2} y \tag{11}$$

che sono equazioni del tipo di EULERO.

Risolveremo la prima; in modo analogo si procede per la seconda. Poniamo:

$$x = (t+m)^n \tag{12}$$

dove n è un numero.

Sostituendo nella prima di (11) si vede che questa equazione è soddisfatta se n è radice dell'equazione di secondo grado:

$$n(n-1) + k^2 = 0. \tag{13}$$

Pertanto l'integrale generale della prima delle (11) sarà:

$$x = A_1(t+m)^{n_1} + A_2(t+m)^{n_2} \tag{14}$$

dove n_1 e n_2 sono le radici della (13), che possiamo supporre reali e distinte se, come ammetteremo, $0 < k < \frac{1}{2}$. A_1 ed A_2 sono poi due costanti arbitrarie che si determinano con le condizioni iniziali.

Ora ricordando che per $t \leq 0$ il moto del pendolo è circolare di velocità costante $\omega_0 = \omega(0)$, con opportuna scelta degli assi si ha, sempre per $t \leq 0$:

$$x = a \cos \omega_0 t; \qquad y = a \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{15}$$

Quindi, per $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$. Si ricava così:

$$A_1 = \frac{an_2}{m^{n_1}(n_2 - n_1)}, \qquad A_2 = \frac{an_1}{m^{n_2}(n_1 - n_2)}.$$

Sostituendo questi valori in (14) e ricordando che $\omega = \frac{k}{t+m}$

quindi $\frac{t+m}{m}=\frac{k}{\omega m}$, avremo:

$$x=\frac{a}{n_1-n_2}\left[n_1\left(\frac{k}{\omega m}\right)^{n_2}-n_2\left(\frac{k}{\omega m}\right)^{n_1}\right]. \tag{16}$$

Risolvendo la seconda delle (11) le cui condizioni iniziali, per le (15), sono: $y=0$, $\dot{y}=\frac{ak}{m}$, si ottiene:

$$y=\frac{ak}{(n_1-n_2)}\left[\left(\frac{k}{\omega m}\right)^{n_1}-\left(\frac{k}{\omega m}\right)^{n_2}\right]. \tag{17}$$

Ora, come si è detto, dopo l'istante t_1 la lunghezza del pendolo e quindi ω, rimangono costanti ed avremo per ω il valore

$$\omega_1=\frac{k}{t_1+m}.$$

Inoltre, sempre per $t>t_1$ valgono le (8) con $\omega=\omega_1$ ed il loro integrale generale sarà:

$$x=C\cos[\omega_1(t-t_1)+\varphi], \qquad y=D\operatorname{sen}[\omega_1(t-t_1)+\psi] \tag{18}$$

dove C, D, φ, ψ, sono costanti che si determinano con la condizione che, per $t=t_1$, $x(t)$ e $y(t)$ e le loro derivate devono coincidere, sia se espresse mediante le (16) (17), sia se espresse mediante le (18).

Si ha così, indicando con $x(t_1)$, $\dot{x}(t_1)$, $y(t_1)$, $\dot{y}(t_1)$ i valori di $x(t)$, $y(t)$ e loro derivate, espresse da (16) e (17) e calcolate in t_1.

$$\begin{aligned} x(t_1)&=C\cos\varphi; & \dot{x}'(t_1)&=-\omega_1 C\operatorname{sen}\varphi;\\ y(t_1)&=D\cos\psi; & \dot{y}(t_1)&=-\omega_1 D\operatorname{sen}\psi. \end{aligned} \tag{19}$$

Da cui si ricava subito:

$$C=\sqrt{x^2(t_1)+\frac{\dot{x}^2(t_1)}{\omega_1^2}}, \qquad D=\sqrt{y^2(t_1)+\frac{\dot{y}^2(t_1)}{\omega_1^2}}. \tag{20}$$

Sostituendo nella (20) i valori di $x(t_1)$, $\dot{x}(t_1)$, $y(t_1)$ $\dot{y}(t_1)$ e ricordando che per la (13) $n_1 n_2=k^2$ si ha:

$$\begin{aligned} C&=\frac{a}{n_1-n_2}\sqrt{\left[n_1\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_2}-n_2\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_1}\right]^2+k^2\left[\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_2}-\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_1}\right]^2};\\ D&=\frac{a}{n_1-n_2}\sqrt{k^2\left[\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_1}-\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_2}\right]^2+\left[n_1\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_1}-n_2\left(\frac{k}{\omega_1 m}\right)^{n_2}\right]^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Ora se il moto per $t>t_1$ fosse ancora circolare, dovrebbe essere, almeno, $C=D$, cioè, posto per brevità, $\frac{k}{\omega_1 m}=\alpha$, dovrebbe valere la relazione

$$(25) \quad [n_1\alpha^{n_2} - n_2\alpha^{n_1}]^2 + k^2[\alpha^{n_2} - \alpha^{n_1}]^2 = k^2[\alpha^{n_1} - \alpha^{n_2}]^2 + [n_1\alpha^{n_1} - n_2\alpha^{n_2}]^2.$$

Ma questa equazione è soddisfatta, se, come si può sempre ammettere $\alpha \neq 1$, solo per $n_1 = n_2$, il che abbiamo già escluso.

Quindi il moto, non è circolare (e, precisamente, ellittico) e l'ipotesi del TIMOSHENKO non è, in generale, verificata.

§ 4. Supponiamo ora che la variazione della lunghezza del pendolo sia adiabatica, o meglio sia adiabatica la variazione di ω.

Le equazioni del moto sono ancora le (8), dove ω è variabile adiabaticamente col tempo. In questo caso, come ha dimostrato il GRAFFI (1), le soluzioni di (8) sono, per $0 < t < t_1$:

$$(26) \qquad x = \sqrt{\frac{2J_0}{\omega}} \operatorname{sen}\left[\int_0^t \omega dt + \delta_0\right], \qquad \dot{x} = \sqrt{2J_0\omega} \cos\left[\int_0^t \omega dt + \delta_0\right]$$

$$(27) \qquad y = \sqrt{\frac{2J'_0}{\omega}} \operatorname{sen}\left[\int_0^t \omega dt + \delta'_0\right], \qquad \dot{y} = \sqrt{2J'_0\omega} \cos\left[\int_0^t \omega dt + \delta_0'\right].$$

dove J_0, J_0', δ_0 e δ_0', sono costanti che si determinano con le condizioni per $t = 0$, che sono, come nel paragrafo precedente:

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = \omega_0 a.$$

Si trova così:

$$(28) \qquad x = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}\, a \cos \int_0^t \omega dt, \qquad y = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}\, a \operatorname{sen} \int_0^t \omega dt.$$

Per $t = t_1$ valgono le (18) del paragrafo precedente e le quattro costanti arbitrarie devono soddisfare le (19).

Si trova subito allora

$$C = D = a\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}}, \qquad \varphi = \psi = \int_0^{t_1} \omega dt.$$

Cioè per $t > t_1$ si ha:

$$x = a\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \cos[\omega(t - t_1) + \varphi] \qquad y = a\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \operatorname{sen}[\omega(t - t_1) + \varphi]$$

cioè il moto, dopo l'alterazione adiabatica del pendolo, è ancora circolare, come si è affermato nel primo paragrafo.

(1) Cfr. D. GRAFFI, *Gli invarianti adiabatici come metodo d'integrazione approssimata di equazioni differenziali*, « Rendiconti Acc. Lincei », serie VI, vol. XV, 1932, pag. 657; e *Sopra alcune applicazioni degli invarianti adiabatici*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo XV, 1936.