Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Giorgi

A proposito di alcune discussioni recenti sui problemi della logica deduttiva

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 256–259.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_256_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

A proposito di alcune discussioni recenti sui problemi della logica deduttiva.

Nota di GIOVANNI GIORGI (a Roma).

Sunto. - *Sono da ritenere vane le dimostrazioni logiche sulla compatibilità di un sistema dei postulati. Si mette in guardia contro le esagerazioni dell'indirizzo logico-deduttivo.*

1. Il prof. ETTORE CARRUCCIO ha richiamato attenzione su alcuni quesiti di logica matematica che hanno dato luogo a discussioni recenti. Desidero qui esporre qualche conclusione sugli stessi argomenti.

Avverto che userò la dicitura « sistema di deduzioni » in luogo di quella « sistema ipotetico-deduttivo » che il citato autore ed altri, seguendo il PIERI, adottano, per denotare un gruppo di postulati con tutte le proposizioni che ne conseguono. E dirò « sistema coerente » per indicare un sistema esente da contraddizioni intrinseche.

2. Anzitutto si presenta la questione di decidere se, preso un gruppo di postulati, questo sia coerente o no. HILBERT, se ben comprendo i suoi ultimi scritti, ha creduto di pervenire, almeno in certi casi, alla dimostrazione logica della coerenza. Contro questo risultato ha preso posizione il GÖDEL, esponendo un'argomentazione secondo la quale si concluderebbe che con mezzi interni a un sistema di deduzioni non si può mai dimostrare la compatibilità delle sue premesse.

La dimostrazione del GÖDEL è piuttosto involuta. Il CARRUCCIO l'ha semplificata; e con qualche semplificazione ulteriore, la parte essenziale del ragionamento si ridurrebbe a questo: — finchè permane il dubbio che un gruppo di postulati possa essere incoerente, qualunque dimostrazione di compatibilità ricavata da esso è sospetta; poichè se il sistema fosse affetto da contraddizione, sarebbe possibile ricavarne qualunque conseguenza assurda; quindi ogni prova di coerenza ricavata dal suo interno posa sopra un circolo vizioso.

Ed è ovvio che se si deve ricorrere a prove ricavate dall'esterno, la questione si sposta e non si risolve.

3. Allora, non saremo mai sicuri che i cinque o sei postulati di PEANO, su cui si fonda la nozione di numero intero, e quindi tutta l'Analisi, siano fra loro compatibili? E che dire di altri quesiti consimili?

Faccio un esempio. — se formo un gruppo di due postulati così — A è uguale a B; — C non è uguale a D, — nessuno metterà in dubbio che questi siano compatibili fra loro; e non occorrerà dimostrazione per convincersene.

Similmente allora: — perchè siamo tutti tranquilli sulla coerenza dei postulati di PEANO? Per due motivi. molto più importanti di quelli logico-deduttivi — in primo luogo per l'esperienza plurimillenaria fatta con l'Aritmetica tradizionale, la quale non ha mai portato a contraddizioni; — in secondo luogo per un motivo psicologico: abbiamo nel nostro pensiero l'intuizione della serie infinita dei numeri naturali, come essa risulta dai detti postulati; e vediamo che essa è concepibile in modo semplice, e tale da non esporre a dubbi. Esperienze e intuizione psicologica ci guidano là dove la logica deduttiva non basta a se stessa.

4. Pensiamo ora ad un'altra questione. Siamo tutti d'accordo, spero, che ogni numero reale ben definito è razionale o irrazionale. Là dove le forze umane non arrivano a decidere, la domanda sulla razionalità non è priva di senso; poichè si può sempre concettualmente pensare a qualche creatura superumana o a qualche macchina capace di fare infinite prove in un tempo finito, e che in ogni caso deciderebbe la questione. Nello stesso modo, non è privo di senso il chiedere che cosa vi è nel centro della Luna, pur sapendo che l'umanità non ha i mezzi per la risposta.

Però, anche accettando questo punto di vista, si presenta un dubbio. Poichè esistono certi numeri reali (p. es. la costante di EULERO) pei quali il quesito sulla razionalità o meno non è stato finora risoluto, sarà forse possibile provare che per qualcuno di essi il quesito, pur avendo un senso, non potrà mai essere risoluto con un numero finito di passi? Se è così, un tale numero verrebbe denominato *ultra-razionale*. Esistono tali numeri? Il CARRUCCIO ha cercato di dimostrare che sì. La sua dimostrazione potrebbe venire schematizzata come segue.

Prendiamo da una parte un numero che è notoriamente irrazione, p. es. π scritto così

(1) $$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

Prendiamo d'altra parte un gruppo di postulati, la cui coerenza non sia stata dimostrata. Sviluppiamo tutti gli enunciati che se ne derivano. Secondo il CARRUCCIO, questi dovrebbero formare un sistema numerabile; probabilmente non è così, ma non importa: basta di avere scelto fra di essi una successione numerabile ed *enumerata,* cioè ordinata in corrispondenza coi numeri naturali in modo ben definito, cioè tale da poter dire senza incertezze qual'è l'enunciato che corrisponde al numero d'ordine n. Allora, se fra essi enunciati vi è una proposizione contradditoria, e se questa ha il rango n, fermiamo lo sviluppo (1) alla n^{me} cifra, e otteniamo un numero x razionale. Altrimenti x viene a coincidere con π ed è irrazionale. Ma dato che non sappiamo decidere se il sistema di postulati assunto come base sia coerente o no, resta indeciso quale sia il carattere del numero x.

Questo ragionamento ha qualche lacuna: la principale sta nella difficoltà, o meglio impossibilità, di additare una regola esplicita per formare quella serie enumerata di deduzioni; fino a che quella regola non sia stata enunciata, il numero x non è definito, nemmeno potenzialmente.

Per ora, è meglio non pensare ai numeri ultra-razionali.

5. Ed ora, mi sia permesso un monito ai nostri studenti. Guardatevi dal feticismo della logica deduttiva, che ha imperversato nei decenni passati. Ricordate quanto ha esposto POINCARÉ, e in tempi recenti anche il nostro SEVERI, in un suo scritto memorabile. Il matematico non può ridursi a una macchina in cui da una parte s'introducono le premesse e dall'altra si ricavano le deduzioni.

Quando voi, con la migliore logica, avete ricavato una conseguenza, come fate a essere sicuri che nella dimostrazione non sia occorso un errore materiale? Chi vi guida a ciò è l'intuizione, il sentimento, non la logica. Sento qualcuno dire: quella dimostrazione potrebbe essere fatta dall'opera di un meccanismo tutto automatico; ma chi m'assicura che quel meccanismo sia costruito a dovere e non fallisca?

E a parte questo, chi guida il matematico a una ricerca importante piuttosto che a una priva di valore? Nella mente dello scienziato vi deve essere qualche cosa di più vivo che un meccanismo logico-deduttivo.

Dando uno sguardo allo sviluppo della logica attraverso i tempi, possiamo convenire con KANT che da ARISTOTELE ai suoi tempi il progresso era stato poco importante. Negli ultimi cento anni quel progresso è stato invece grandioso, o diciamo meglio, molto voluminoso. Ma i risultati di questo progresso sono stati proprio notevoli? Le male lingue guardano con sospetti quelli che essi chiamano « simboli cabalistici », e osservano che quando si tratta di dimostrare che $7 \times 5 = 5 \times 7$, le strutture logico-matematiche moderne, con tutto il loro simbolismo, riescono egregiamente. Ma quando si chiede di risolvere certi quesiti controversi, come quelli sulla comparabilità di due insiemi, o sulla legittimità o meno del trasfinito Ω di CANTOR, la risposta non si ottiene.

Ed è per questo che direi ai giovani: state in guardia da tutto quello che va nel bizantinismo, da quel sadismo di disquisizioni sottili a cui certi studi possono condurre troppo facilmente. Affrontate dei problemi che non siano soltanto formali, e che provengano veramente da altri rami della matematica. Preferite sempre il risolvere problemi nuovi con metodi vecchi anzichè riottenere soluzioni vecchie in forme nuove.