Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Leoni

Sulle cicloidi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 279–283.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sulle Cicloidi.

Nota di UGO LEONI (a Lucca).

Sunto. - *Nuova generazione, mediante tre cerchi concentrici, delle cicloidi rette, loro affini e delle cicloidi oblique. Alcune proprietà.*

1. Siano le equazioni parametriche, in coordinate cartesiane ortogonali,

(1) $$x(\omega) = a\omega - b \operatorname{sen} \omega, \quad Y(\omega) = d - c \cos \omega$$

dove la variabile indipendente ω è un angolo $(-\infty < \omega < +\infty)$ ed a, b, c, d sono segmenti rettilinei.

Eseguita la traslazione $y(\omega) = Y(\omega) + a - d$, e scritto x ed y invece di $x(\omega)$, $y(\omega)$, si ha:

(2) $$x = a\omega - b \operatorname{sen} \omega, \quad y = a - c \cos \omega$$

dove a, b, c possono ritenersi sempre positivi. Infatti, da tutte le combinazioni dei doppi segni di a, b, c si ricade, per cambiamenti di segno di coordinate, nelle (2) o nelle seguenti:

$$x = a\omega - b \operatorname{sen} \omega, \quad y = a + c \cos \omega$$
$$x = a\omega + b \operatorname{sen} \omega, \quad y = a \pm c \cos \omega$$

le quali si identificano colle (2) ponendo nella prima $Y = 2a - y$; nella seconda $\omega = \varphi - \pi$, $X = x + a\pi$, $Y = y$; nella terza

$$\omega = \varphi + \pi, \quad X = x - a\pi, \quad Y = 2a - y.$$

Se nelle (2) pongo: $\eta = \frac{b}{c} y$, $Y = \eta + a - \frac{ab}{c}$, ho

$$x = a\omega - b \operatorname{sen} \omega, \quad Y = a - b \cos \omega,$$

cioè le cicloidi (ordinaria per $a = b$, allungata per $a > b$, accorciata per $a < b$).

Se pongo invece: $X = \frac{c}{b} x$, $Y = y - a + \frac{ac}{b}$, ho

$$X = \frac{ac}{b} \omega - c \operatorname{sen} \omega, \quad Y = \frac{ac}{b} - c \cos \omega$$

cioè di nuovo le cicloidi suddette. Dunque:

Le (2) *rappresentano cicloidi affini alle ordinaria, accorciata, al-*

lungata. Se l'asse di affinità è quello delle x, (y), *il rapporto di affinità è* $\frac{c}{b}$, $\left(\frac{b}{c}\right)$.

La discussione delle (2) può proseguirsi nel modo usato per le cicloidi ordinaria, accorciata e allungata.

E così: per $a = b$ si hanno cicloidi cuspidate (senza flessi nè punti doppi); per $a > b$ si hanno cicloidi allungate o inflesse (senza cuspidi nè punti doppi); per $a < b$ si hanno cicloidi accorciate o nodate (senza cuspidi nè flessi). In particolare:

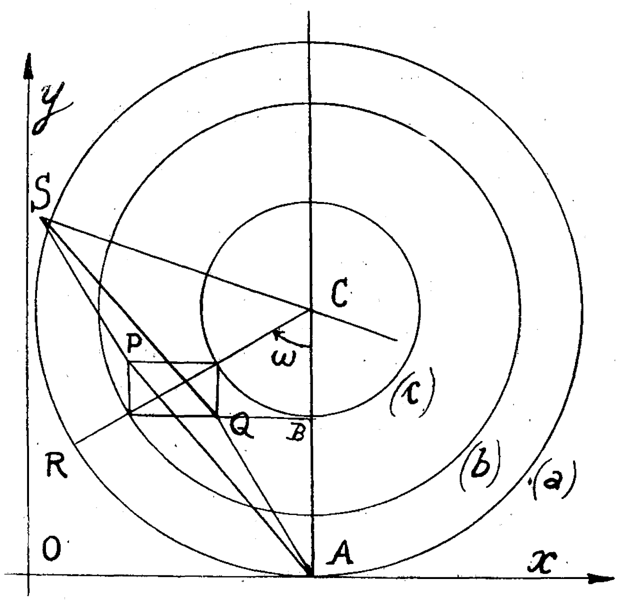
per $a \gtreqless b = c$ cicloidi allungata, ordinaria, accorciata;

per $a = b \gtrless c$, cicloidi di FERMAT, affini alla ordinaria (dette impropriamente accorciata e allungata) ed in tutti gli altri casi cicloidi affini alle accorciata e allungata.

Osserviamo che per $b \gtrless c$ $\left(\text{avendosi } \frac{c}{b} \gtrless 1 \text{ oppure } \frac{b}{c} \lessgtr 1\right)$ dove i segni superiori si corrispondono, e così gli inferiori, possiamo definire *compresse* o *dilatate* rispetto all'asse x, (y), le cicloidi affini, secondo che il relativo rapporto di affinità è $\lessgtr 1$, e togliere così ogni improprietà alle qualifiche delle cicloidi di FERMAT.

2. Ecco ora una generazione di tutte le suddette cicloidi:

Siano (vedasi figura) tre cerchi concentrici rigidamente connessi,



dei quali a) rotoli senza strisciare sulla retta OA, e quindi sia

$OA = AR = \omega$. Si costruisca il punto P (nel modo notissimo in cui si costruisce per punti l'ellisse di centro C e di semiassi b e c paralleli ad x, y, dati i cerchi b) e c). Le equazioni parametriche del luogo di P sono:

$$x = a\omega - b \operatorname{sen} \omega, \quad y = a - c \cos \omega$$

e quindi tale luogo è una delle curve (2).

Possiamo enunciare il teorema:

Le curve (1) *o* (2) *sono generate da un punto* P, (ξ, η) *di un'ellisse, rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalle equazioni parametriche:* $\xi = -$ b *sen* ω, $\eta = -$ c *cos* ω, *e soggetta alla traslazione* aω, *parallela all'asse* ξ, *(dove* a, b, c *sono segmenti rettilinei costanti, e l'angolo* ω *è la variabile indipendente)* (*).

3. Do alcune proprietà delle cicloidi (2)

a) La parallela per P alla QA è normale alla cicloide (P). Infatti: $QB = c \operatorname{sen} \omega$, $AB = a - b \operatorname{sen} \omega$, ed essendo, per le (2):

$$dx = (a - b \cos \omega) d\omega, \quad dy = c \operatorname{sen} \omega d\omega,$$

ottengo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QB}{AB}.$$

b) Poichè lo scambiare P con Q equivale a scambiare il cerchio (b) col cerchio c), luogo di Q è pure una delle (2), e la proprietà è reciproca, cioè la parallela per Q alla PA è normale alla cicloide (Q).

c) Per entrambe le cicloidi (P), (Q), si ha: $ydx = (a - b \cos \omega) \cdot$ $\cdot (a - c \cos \omega) d\omega$; quindi esse hanno aree uguali.

Valore dell'area di una arcata $= 2\pi\left(a^2 + \dfrac{bc}{2}\right) = 2\pi a^2 + \pi bc$; cioè

(*) Per una seconda edizione dell'ottimo Trattato sulle Curve Piane algebriche e trascendenti del prof. GINO LORIA (I E. italiana, Milano 1930) andrà emendato quanto segnalo:

a) Vol. II. § 222, pag. 95. La cicloide, là detta di LAISANT, è diversa dalle nostre e non ammette la cicloide di FERMAT come caso particolare. Delle due apparenti costanti a, r, una almeno è funzione della lunghezza dell'arco ellittico.

b) Mediante traslazioni secondo l'asse y, si prova che sono cicloidi allungate o accorciate:

I) La « cicloide secondaria del RICCI », (ibid. § 223, pag. 96) e Storia delle Matematiche dello stesso Autore, vol. II, § 325, pag. 270).

II) La « Curva anonima di MANNHEIM », (ibid. § 223, pag. 97).

III) Le panevolute della cicloide ordinaria (ibid. § 287, pag. 317).

c) Sicchè CLAIRAUT aveva ragione (ibid. » 223, pagg. 97, 98).

somma del doppio del circolo di raggio a, e della ellisse di semiassi b, c.

Per $bc = a^2$ si hanno aree uguali a quella della cicloide ordinaria di parametro a.

d) Le parallele: per Q alla PA, e per P alla QA si incontrano in un punto S, il cui luogo è la cicloide (ordinaria, allungata, o accorciata)

$$(3) \qquad x = a\omega - (b + c)\,\mathrm{sen}\,\omega, \quad y = 2a - (b + c)\cos\omega.$$

Tal curva resta invariata per $b + c =$ costante; e la SC ne è la normale.

e) Cerco l'inviluppo della retta PC, dove P è il punto generatore, C il centro dei cerchi, assunta per asse delle x la retta percorsa da C, ed ho:

$$x_p = a\omega - b\,\mathrm{sen}\,\omega, \quad y_p = -c\cos\omega, \quad x_c = a\omega, \quad y_c = 0.$$

Eliminando ω fra l'equazione della retta PC e la derivata della stessa rispetto ad ω, e ponendo $2\omega = \varphi$, ottengo:

$$X = \frac{a}{2}(\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi), \quad Y = -\frac{ac}{2b}(1 + \cos\varphi)$$

cioè: una cicloide ordinaria, per $b = c$, ossia per le cicloidi ordinaria, accorciata e allungata; ed una cicloide di FERMAT in tutti i rimanenti casi.

Questo significa che, dividendo in rapporto costante le tangenti alla cicloide ordinaria (di FERMAT), ove per asse delle x si assuma la tangente nelle culminazioni, si hanno nel primo caso la cicloide ordinaria, la allungata e la accorciata, e nel secondo tutte le altre cicloidi del tipo (2).

E poichè la evoluta di una cicloide ordinaria è una cicloide ordinaria, ottenuta dalla data eseguendo la traslazione $X = x + a\pi$, $Y = y + 2a$, corollario di questo teorema è quello di MANNHEIM, il quale, con le curve riportate in *b*-II) della nota a pie' di pagina, risolve il problema di trovare il luogo dei punti che dividono in rapporto dato le normali alla cicloide ordinaria.

4. La costruzione di cui al § II) può generalizzarsi.

Il luogo di P, (Q), corrispondeva (§ II) ad un'ellisse col semiasse b, (c), normale all'asse delle y. Se invece l'asse b forma coll'asse y l'angolo costante φ, abbiamo le *cicloidi oblique*:

$$\left.\begin{aligned} x_p &= a\omega - b\cos\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi + \omega) + c\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos(\varphi + \omega) \\ y_p &= a \quad - b\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi + \omega) - c\cos\varphi\cos(\varphi + \omega) \end{aligned}\right\} \text{(luoghi di } P)$$

$$\left.\begin{aligned} x_a &= a\omega + b \operatorname{sen}\varphi \cos(\varphi+\omega) - c\cos\varphi \operatorname{sen}(\varphi+\omega) \\ y_a &= a \quad - b\cos\varphi\cos(\varphi+\omega) - c \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\varphi+\omega) \end{aligned}\right\} \text{(luoghi di } Q).$$

È facile dimostrare che queste cicloidi possiedono le proprietà: *a*) *b*) del § II, che la proprietà *c*) vale per l'area di un'intera arcata, cioè per il tratto $\omega = \varepsilon \div \omega = 2\pi + \varepsilon$; e che la proprietà *d*) vale in pieno, avendosi la (3) per qualsiasi valore di φ. La lunghezza d'arco della cicloide obliqua (P), è data da:

$$S = \int_0^\omega \sqrt{[a\cos\varphi - b\cos(\varphi+\omega)]^2 + [a \operatorname{sen}\varphi - c \operatorname{sen}(\varphi+\omega)]^2} \cdot d\omega$$