UMI

## Recensioni

* N. W. McLachlan, Modern Operational Calculus with applications in the technical mathematics, Mcmillan and Co., London, 1948 (G. Sansone)
* W. Blaschke, Projective Geometrie, Wolfenbüttel, Hannover, 1947 e W. Blaschke, Analytische Geometrie, Wolfenbüttel, Hannover 1948 (B. Segre)
* Hermann Athen, Vektorrechnung, Wolfenbüttel, Hannover 1948 (D. Graffi)


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **3** (1948), n.3, p. 284–287.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_284_0>

# RECENSIONI

N. W. McLachlan, *Modern Operational Calculus with applications in technical mathematics.* Macmillan and Co., London 1948, pp. XIV + 218; 21 s.

G. Doetsch pubblicò nel 1937 l'opera fondamentale « *Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation* » che raccolse e sistemò la teoria e le applicazioni della trasformazione di Laplace [cfr. questo *Bollettino*, (1), 17 (1938), pp. 127-134]; seguì poi in Italia nel 1943 il bel volume di A. Ghizzetti « *Calcolo Simbolico* », che al rigore scientifico congiunge la semplicità e la perspicuità dell'esposizione [cfr. questo *Bollettino*, (3), 2 (1947), pp. 58-60], e N. W. Mc Lachlan arricchisce ora la letteratura matematica di un interessante volume che come quello di A. Ghizzetti è scritto per gli ingegneri e i tecnici.

La trasformazione di Laplace, come è noto, fornisce uno strumento che sostituendosi ai metodi euristici di Heaviside [1] permette di risolvere notevoli problemi ai limiti e al contorno per le equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali relative ai problemi di propagazione, e l'A. consegue i suoi scopi richiedendo quasi esclusivamente al lettore le nozioni matematiche che si impartiscono per il solito nei nostri bienni di avviamento all'ingegneria; in appendice sono poi raccolte le dimostrazioni di alcune proposizioni schizzate nel testo.

Per l'A. se $f(t)$ definita in $(o, +\infty)$ è la *funzione oggetto*, la *funzione risultato* $\Phi(p)$ è data dalla relazione

$$p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \Phi(p) \tag{1}$$

per la quale l'A. usa i due simboli

$$f(t) \supset \Phi(p), \qquad \Phi(\mathrm{p}) \subset f(t)$$

mentre per la classica trasformazione

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \Phi(p)\,. \tag{2}$$

l'A. usa le notazioni

$$f(t) \longrightarrow\!\!\!\supset \Phi(p) \qquad \Phi(p) \subset\!\!\!\longleftarrow f(t)\,.$$

[1] Cfr. ad es. G. Sansone, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale*, II (Bologna, 1941), p. 247.

La preferenza della trasformazione (1) rispetto alla (2) deriva dalla sua identità con la trasformazione di HEAVISIDE, dall'equivalenza delle dimensioni di $f(t)$ e $\Phi(p)$ quando si concepisca $t$ come un tempo e $p$ come il reciproco di un tempo, e dal fatto che la trasformata di una costante $A$ è la costante stessa, e non $A/p$ come seguirebbe dalla (2).

Al volume si accompagna un gran numero di esempi, sia nel testo come in appendice, ed è anche data in fondo una lista di 74 trasformazioni.

L'A. richiede nelle applicazioni che il lettore conosca insieme alle funzioni elementari le funzioni di BESSEL e le relative funzioni associate così frequentemente usate nelle matematiche applicate, e altri libri per i tecnici richiedono oggi nozioni su altre classi di trascendenti; è avvertita ormai dappertutto la necessità di un corso istituzionale di matematiche nei trienni di applicazione di ingegneria, che affidato ai matematici, offra ai nostri tecnici la possibilità di vedere al di là dei resultati empirici offerti dai manuali e dai prontuari, di saper schematizzare i loro problemi e di poterli risolvere rimanendo aderenti alla natura delle questioni stesse.

G. SANSONE

W. BLASCHKE, *Projective Geometrie*, 160 pagine, 61 figure, DM. 13 (Wolfenbüttel, Hannover, 1947).

W. BLASCHKE, *Analytische Geometrie*, 152 pagine, 67 figure ed un ritratto di Cartesio, DM. 10,50 (Wolfenbüttel, Hannover, 1948).

La geometria analitica e la geometria proiettiva, attraverso una lunga evoluzione che toccò il suo apogeo nel secolo scorso, hanno oggi raggiunto un assetto complesso per la molteplicità degli indirizzi e dei risultati. Parrebbe quindi impossibile dare un'idea adeguata di tale assetto, disponendo di poco più di 150 pagine per ciascuno dei due suddetti argomenti: ciò è invece mirabilmente compiuto coi due libretti in esame, nei quali il BLASCHKE — superando in modo brillante le difficoltà di spazio impostegli dalle attuali condizioni economiche tedesche — conferma le sue ben note eminenti qualità di trattatista.

Sia nell'una che nell'altra opera l'A. ricorre prevalentemente a metodi analitici, usando vettori, matrici, quaternioni, numeri duali, ecc.; ciò è fatto con vero virtuosismo, in modo da porre sempre in luce il contenuto geometrico dei passaggi essenziali, e da mostrare come i risultati ottenuti si concatenino variamente fra loro e con altri di campi limitrofi. L'esposizione è corredata da numerosissime date, da pregevoli indicazioni biografiche e bibliografiche [1], e da appropriate figure. Non tutte le deduzioni sono fatte collo stesso grado di compiutezza, ed i due libri — sebbene scritti con fini didattici — non riescirebbero facili ai nostri studenti dei corsi propedeutici per la loro stringatezza, ed anche per l'elevatezza ed il carattere un po' frammentario di taluni degli argomenti in essi trattati. La loro lettura è però resa gradevole e suggestiva dalle

[1] L'abbondanza di notizie storiche può persino sembrare ingombrante ed eccessiva; specie se si tiene conto che, com'è quasi inevitabile in tale delicata materia, non tutte le attribuzioni risultano ineccepibili. Così, ad esempio, alla nota condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità di un sistema di equazioni lineari non omogenee giunsero Rouché e Capelli, rispettivamente nel 1875 e nel 1892; il Blaschke non cita nè l'uno nè l'altro di questi autori ed attribuisce la suddetta condizione a Frobenius, assegnandone come date il 1905 nel primo dei due volumi in discorso ed il 1879 nel secondo.

eccellenti doti stilistiche, dalla ricchezza del contenuto, e dall'eleganza geometrica che li pervade. Ottima la veste tipografica, specie se si tien conto delle difficoltà del momento.

Il libro sulla *Geometria proiettiva* prescinde dal punto di vista assiomatico, fondandosi sugli elementi della geometria analitica, che suppone noti. Esso si occupa prevalentemente delle più semplici figure e configurazioni della geometria proiettiva, delle quali lumeggia — sovente in più modi — i vari aspetti geometrici, analitici e gruppali.

I primi tre degli otto paragrafi in cui l'opera è divisa, sono rispettivamente dedicati ad un'introduzione storica, alle prime proprietà sulle matrici e sui sistemi di equazioni lineari colle loro interpretazioni geometriche, ai birapporti ed al teorema fondamentale di Staudt.

Il § IV introduce le coniche analiticamente, e ne deduce la loro classificazione e le loro generazioni proiettive. Passa quindi al teorema di Desargues sui triangoli omologici ed a quelli di Pappo e di Pascal, l'ultimo dei quali è ottenuto in cinque guise diverse, fra cui una stereometrica. Lo studio delle coniche quali curve razionali conduce poi alla precisazione di Darboux per il teorema di P. Serret ed al principio di trasporto di Hesse. Seguono il teorema sul quadrangolo, le metriche proiettive, e qualche cenno sull'apolarità fra coniche e sulla teoria dei divisori elementari. Infine, definiti i fuochi al modo di Dandelin, vengono dedotte alcune proprietà focali.

Dopo aver posti nel § V i fondamenti della geometria della retta nello spazio ordinario (complessi lineari, ecc.), incluso un cenno sulla classica interpretazione iperspaziale di Klein, il § VI tratta delle quadriche nello spazio ordinario dando l'estensione di alcuni degli argomenti già visti sulle coniche, oltre a qualche proprietà delle cubiche sghembe. Il § VII è principalmente dedicato alla geometria ellittica dello spazio, ed alle relazioni che possono porsi tra questa e la geometria sferica coll'uso dei quaternioni esso fornisce un'interessante interpretazione nella prima dei gruppi finiti di movimenti nella seconda, ossia della teoria dei poliedri regolari, con particolare riguardo al caso del tetraedro regolare. Il paragrafo contiene altresì cenni sulle affinità circolari di Möbius, sulla geometria iperbolica, sulla classificazione metrica e sulle proprietà focali delle quadriche.

Il § VIII è un'esposizione sui tetraedri di Möbius, nella quale confluiscono in modo sovente impensato ed originale buona parte delle nozioni precedenti. Dopo aver dimostrato in cinque modi — variamente istruttivi — che una qualunque condizione di appartenenza fra gli otto vertici e le otto facce di una coppia di tetraedri di Möbius è conseguenza delle rimanenti, vengono ivi approfondite varie proprietà geometriche e gruppali di una coppia siffatta, collegandole a quelle della configurazione di Kummer e del gruppo di Klein.

Il libro sulla *Geometria analitica* si serve del metodo analitico, per studiare varie questioni di cinematica, di statica e di geometria (elementare, proiettiva e differenziale).

Il primo dei sette paragrafi in cui l'opera è divisa fornisce nozioni introduttorie sulle coordinate, sui vettori e sulle matrici; esso contiene altresì qualche proprietà delle rotazioni dello spazio attorno ad un punto, viste coll'uso dei quaternioni.

Il paragrafo successivo è dedicato agli elementi della geometria dei cerchi e delle sfere, e comprende fra l'altro lo studio della configurazione definita dai centri di similitudine di quattro sfere, nonchè alcune proprietà delle inversioni e delle trasformazioni equilonghe di Laguerre.

Seguono due paragrafi relativi ai vettori applicati ed ai momenti d'inerzia. I vettori applicati vengono rappresentati mediante opportune coordinate, le quali permettono poi di studiarne i sistemi e le loro riduzioni, in collegamento anche alla teoria dei complessi lineari di rette ed a quella degli atti di moto. Rappresentate le rette orientate dello spazio coi punti duali della sfera unitaria, se ne deduce il principio di trasporto di Study, che viene quindi applicato per stabilire un teorema di Hjelmslev e F. Morley, e per approfondire lo studio del gruppo dei movimenti nello spazio.

La considerazione dei momenti d'inerzia conduce in modo semplice e spontaneo alle quadriche ed ai loro sistemi omofocali, a cui sono rispettivamente dedicati i due paragrafi seguenti. L'ultimo di questi è di natura relativamente elevata, e comprende i teoremi di Ivory e di Herinci, varie nozioni sulle ciclidi di Dupin, sugli spazi di Stäckel, sulle geodetiche dell'elissoide, sul complesso di Reye (formato dagli assi delle coniche appartenenti ad una quadrica), ecc., e le costruzioni di coniche e quadriche mediante fili dovute a Graves, Staude ed altri.

Il paragrafo finale è una ricca ed interessante raccolta di definizioni, di formule e di notizie bibliografiche, le quali completano ed estendono la materia precedentemente trattata.

B. Segre

## Hermann Athen - *Vektorrechnung* - Wolfenbütteler Verlagsanstadt G.m.b.H. - Wolfenbüttel und Hannover, 1948.

Nel presente volumetto si espongono quasi tutte le nozioni di calcolo vettoriale veramente necessarie nella Meccanica e Fisica Matematica. Dopo avere introdotto il concetto di vettore, le operazioni elementari su questi enti, i vettori dipendenti da una coordinata (dei vettori applicati si parla in altro volume della collezione), si svolge, con una certa ampiezza, la teoria dei campi scalari e vettoriali, e degli operatori gradiente, divergenza e rotazione, non omettendo anche le utili espressioni di questi operatori in coordinate curvilinee, e un cenno sui campi variabili col tempo. L'ultimo capitolo del libro è dedicato ai tensori doppi dello spazio ordinario (omografie vettoriali), di cui si ricavano le principali proprietà (come gli invarianti e gli ellissoidi del tensore); forse sarebbe stato desiderabile la nozione di divergnza di un tensore (gradiente di una omografia) così importante nella teoria della elasticità. La trattazione è sempre molto chiara e facile, pur sorvolando qualche dimostrazione un po' complessa, come, ad esempio, la proprietà distributiva del prodotto vettoriale (pag. 17). Comunque, il libro appare ottima guida per lo studioso che intende apprendere il calcolo vettoriale in vista delle sue applicazioni alla Meccanica e alla Fisica Matematica.

D. Graffi