Beniamino Segre

Generalizzazione di un teorema di Beltrami

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 16–22.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_16_0>

Generalizzazione di un teorema di Beltrami.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si determinano tutte le superficie rappresentabili su di un piano in guisa che le loro geodetiche abbiano per imagini cerchi, e si studiano le rappresentazioni di questo tipo ad esse relative.*

1. Un problema fondamentale nella teoria delle carte geografiche è quello di rappresentare una data superficie S su di un piano π, in modo che alle geodetiche di S corrispondano su π curve C facilmente tracciabili. Sono ben noti al riguardo i risultati del BELTRAMI relativi alla rappresentazione geodetica, ossia al caso in cui le C siano linee rette (1), e quelli di F. BUSSE,

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) Cfr. E. BELTRAMI, *Risoluzione del problema: « Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette »*, « Ann. di Mat. », (1) 7 (1865), 185-204 = *Opere matematiche*, vol. I (Milano, Hoepli, 1902), 262-280.

riferentesi all'ipotesi che le C siano cerchi e la rappresentazione di S su π riesca conforme [2].

In questa Nota io incomincio (nn. 2, 3) col dare una dimostrazione autonoma del seguente teorema, il quale include in particolare i risultati di BELTRAMI e di BUSSE a cui dianzi si è alluso:

Le sole superficie rappresentabili su di un piano euclideo, in modo che le loro geodetiche si trasformino in cerchi (o, in particolare, in rette), sono le superficie a curvatura costante.

Determino quindi (n. 4) tutte le rappresentazioni del tipo suddetto relative ad un'assegnata superficie a curvatura costante, e mostro ch'esse dipendono da 11 parametri, valendomi di un lemma — qui stabilito nel n. 5 — in sè non privo di interesse. Ciò mi permette da ultimo (n. 6) di ottenere una nuova semplicissima dimostrazione del teorema testè enunciato, poggiante sul caso particolare dovuto a BELTRAMI.

In lavori successivi trasporterò i suddetti risultati alle varietà riemanniane di dimensione arbitraria, ed interpreterò tali estensioni nell'ottica geometrica e nella dinamica dei sistemi olonomi conservativi.

2. Determiniamo preliminarmente quand'è che, su di un piano euclideo dove le (x, y) siano coordinate cartesiane ortogonali, ciascuna delle curve integrali dell'equazione differenziale

$$y'' = ay'^3 + by'^2 + cy' + d \tag{1}$$

è un cerchio, le a, b, c, d essendo date funzioni di x ed y.

Gli ∞^3 cerchi del piano sono caratterizzabili come curve integrali dell'equazione differenziale

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

Eliminando y'' ed y''' fra questa equazione, la (1) e l'equazione ottenuta derivando totalmente ambo i membri della (1) rispetto ad x, otteniamo la

$$p_0y'^6 + p_1y'^5 + p_2y'^4 + p_3y'^3 + p_4y'^2 + p_5y' + p_6 = 0, \tag{2}$$

dove, per abbreviare, abbiamo posto

$$\left\{\begin{aligned} p_0 &= a_y - ab \\ p_1 &= a_x + b_y + 3a^2 - b^2 - 2ac \\ p_2 &= a_y + b_x + c_y + 5ab - 3ad - 3bc \\ p_3 &= a_x + b_y + c_x + d_y + 4ac + 2b^2 - 4bd - 2c^2 \\ p_4 &= b_x + c_y + d_x + 3ad + 3bc - 5cd \\ p_5 &= c_x + d_y + 2bd + c^2 - 3d^2 \\ p_6 &= d_x + cd \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[2] Ved. E. BUSSE, *Ueber eine spezielle konforme Abbildung der Flachen konstanten Krummungsmaasses auf die Ebene* (Dissertation, Berlin, 1896-97), pag 9.

e le lettere x ed y in basso denotano derivazioni parziali rispetto a x ed y.

La condizione richiesta equivale a ciò che ogni integrale della (1) soddisfi alla (2), e si traduce dunque colle

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0. \tag{4}$$

Ora le (3) forniscono

$$p_0 - p_2 + p_4 - p_6 = 6(a-c)(d-b)$$
$$p_1 - p_3 + p_5 = 3(a-c)^2 - 3(d-b)^2,$$

sicchè, in forza delle (4), dev'essere

$$a = c, \qquad b = d. \tag{5}$$

Dunque, tenuto conto delle (3), le (4) riduconsi alle (5) ed alle

$$a_y - ab = 0, \qquad a_x + b_y + a^2 - b^2 = 0, \qquad b_x + ab = 0. \tag{6}$$

Le (5), (6) sono in particolare soddisfatte se $a = b = c = d = 0$, nel qual caso le curve integrali della (1) sono le ∞^2 rette del piano.

3. Sia S una superficie rappresentata su di un piano euclideo π, sicchè quali coordinate curvilinee di un qualunque punto di S si possono assumere le coordinate cartesiane ortogonali (x, y) del corrispondente punto di π. Denotiamo con

$$K = K(x, y)$$

la curvatura della superficie S nel punto (x, y), e con

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

il quadrato dell'elemento lineare di S. Allora la (1) risulta l'equazione differenziale delle linee geodetiche di S, qualora — colle notazioni usuali — vi si ponga

$$a = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \; b = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, \; c = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \; d = -\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ (3)}. \tag{7}$$

In forza del n. 2, per stabilire il risultato enunciato nel n. 1 dobbiamo mostrare che, se le (7) soddisfanno alle (5), (6), dev'esser $K =$ cost.

Suppongasi dunque che sussistano le (5), (6), ove le a, b, c, d si esprimano mediante le (7). Avuto riguardo a tali equazioni, le

(3) Cfr., per esempio, L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*. 3ª ed., vol. I, parte 1ª (Pisa, Spoerri, 1922), p. 277, formula (III*).

ben note formule per la curvatura

$$KE = \{12,12\}, \quad KF = \{11,21\}, \quad KF = \{22,12\}, \quad KG = \{21,21\}, \text{ (4)}$$

le due intermedie delle quali si sostituiscano colle loro combinazioni lineari con rispettivi coefficienti 2/3, 1/3 ed 1/3, 2/3, possono esplicitarsi nella forma

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} KE &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_x - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_x + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}^2 \\ KF &= -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_y + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \qquad KF = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_x + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} \\ KG &= \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_y - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_y + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2 + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}^2. \end{aligned} \right.$$

Le due equazioni (8) intermedie forniscono intanto

$$(9) \qquad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_x = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_y.$$

Rammentiamo inoltre che i simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie soddisfano alle identità

$$E_y - F_x = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} E + \left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right] F - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} G$$

$$F_y - G_x = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} E + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] F - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} G \text{ (5)}.$$

Moltiplicando ambo i membri di queste per K, e servendoci delle (8), riusciamo senza difficoltà ad esprimere $KE_y - KF_x$ e $KF_y - KG_x$ mediante i simboli di CHRISTOFFEL e le loro derivate. Orbene, si perviene esattamente alle stesse espressioni calcolando $(KE)_y - (KF)_x$ e $(KF)_y - (KG)_x$ rispettivamente mediante le prime due e le ultime due equazioni (8), ove si tenga conto delle (5), (6), (7), (9). Ne conseguono le

$$EK_y - FK_x = 0, \qquad FK_y - GK_x = 0,$$

le quali implicano $K_x = K_y = 0$ e quindi $K = \text{cost.}$

4. Data una superficie S a curvatura costante, troveremo t u t t e le rappresentazioni di S su di un piano che ne trasformano in cerchi le geodetiche, procedendo nel modo seguente. Incominciamo col rappresentare S geodeticamente su di un piano $\pi'(x', y')$, il che

(4) Ved. L. BIANCHI, *op. cit.*, p. 101, formule (35) o (IV).

(5) Cfr. L. BIANCHI. *op. cit.*, p. 82, formule (A).

— a norma del risultato di BELTRAMI richiamato nel n. 1 — è sempre possibile. Si tratterà allora di rappresentare il piano π' su di un secondo piano π (x, y), in guisa che alle rette del primo corrispondano cerchi sul secondo.

Ci proponiamo di far vedere che *vi sono precisamente* ∞^{11} *rappresentazioni di quest'ultimo tipo, esprimibili ciascuna con equazioni della forma*

$$x' = f(x, y)/h(x, y), \qquad y' = g(x, y)/h(x, y), \tag{10}$$

dove f, g *ed* h *sono tre polinomi, al più di 2° grado nelle* x, y, *tali che le equazioni*

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0, \qquad h(x, y) = 0$$

rappresentino tre cerchi indipendenti di π.

È chiaro intanto che, in tali ipotesi, la corrispondenza (10) ha i requisiti richiesti, e trasforma omograficamente le rette del piano π' in cerchi di una rete sul piano π. Risulterà reciprocamente, nel n. 5, che una rappresentazione del tipo voluto muta rette di un fascio del piano π' in cerchi di un fascio del piano π, i due fasci essendo riferiti fra loro omograficamente (6). Poichè i fasci di rette del piano π' hanno a due a due una retta in comune, così i corrispondenti fasci di cerchi del piano π debbono avere a due a due un cerchio in comune, ed appartengono quindi ad una rete (7). Questa rete risulta proiettiva alla rete delle rette del piano π', il che fornisce appunto equazioni della forma (10) per la data rappresentazione.

5. La proprietà enunciata senza dimostrazione nell'ultimo capoverso del n. 4, non è che un corollario immediato del lemma seguente.

Si consideri una corrispondenza puntuale fra due piani euclidei π, π', *che muti un punto* O *di* π *in un punto* O' *di* π' *e sia regolare (ossia invertibile) nell'intorno di questi punti. Se ad ogni retta di* π' *passante per* O' *corrisponde su* π *una curva avente in* O *un cerchio iperosculatore, gli* ∞^1 *cerchi iperosculatori in* O *alle curve di* π *trasformate delle varie rette di* π' *uscenti da* O', *appartengono sempre ad un medesimo fascio; questo fascio di cerchi risulta inoltre*

(6) Rette e cerchi vanno naturalmente limitati a loro porzioni convenienti, in campi opportuni dei rispettivi piani π', π.

(7) Ciò si vede subito riferendo omograficamente gli ∞^3 cerchi del piano π ai piani di un S_3, e rammentando che più rette di S_3 a due a due incidenti, ma non situate in un piano, contengono tutte necessariamente uno stesso punto.

riferito omograficamente al fascio delle corrispondenti rette di π'.

Assumiamo in π, com'è sempre possibile, coordinate cartesiane ortogonali (x, y) di origine O, ed in π' coordinate proiettive non omogenee (x', y') di origine O', scelte in guisa tale che le equazioni della corrispondenza nell'intorno di O, O' si scrivano nella forma:

$$x' = x + (h_1x^2 + h_2xy + h_3y^2) + (h_4x^3 + h_5x^2y + h_6xy^2 + h_7y^3) + \dots$$
$$y' = y + (k_1x^2 + k_2xy + k_3y^2) + (k_4x^3 + k_5x^2y + k_6xy^2 + k_7y^3) + \dots ,$$

dove i puntini denotano termini di grado maggiore di tre nelle x, y. Posto per abbreviare

$$r_i = k_i - \lambda h_i \qquad (i = 1, 2, \dots), \tag{11}$$

abbiamo per ipotesi che, per ogni valore del parametro λ, la curva

$$y - \lambda x + (r_1x^2 + r_2xy + r_3y^2) + (r_4x^3 + r_5x^2y + r_6xy^2 + r_7y^3) + \dots = 0 \tag{12}$$

ammette in O un cerchio iperosculatore.

Ora ogni circolo tangente in O alla (12) si rappresenta con un' equazione della forma

$$\mu(x^2 + y^2) - \lambda x + y = 0, \tag{13}$$

ossia

$$y = \lambda x - (1 + \lambda^2)\mu x^2 + 2\lambda(1 + \lambda^2)\mu^2x^3 + \dots . \tag{14}$$

Sostituendo ad y lo sviluppo (14) nella (12), si vede che il cerchio osculatore in O alla (12) si ottiene ponendo nella (13)

$$\mu = \frac{r_1 + r_2\lambda + r_3\lambda^2}{1 + \lambda^2}; \tag{15}$$

nello stesso tempo risulta che, affinchè tale cerchio iperosculi la curva (12) in O, occorre che sia

$$(1 + \lambda^2)[(r_1 + r_2\lambda + r_3\lambda^2)(r_2 + 2\lambda r_3) - (r_4 + r_5\lambda + r_6\lambda^2 + r_7\lambda^3)] =$$
$$= 2\lambda(r_1 + r_2\lambda + r_3\lambda^2)^2.$$

Quest' uguaglianza dev' essere per ipotesi un' identità rispetto a λ, quando vi si esprimano le r_i mediante le (11); e ciò esige che il polinomio cubico in λ

$$r_1 + r_2\lambda + r_3\lambda^2 = k_1 + (k_2 - h_1)\lambda + (k_3 - h_2)\lambda^2 - h_3\lambda^3$$

sia divisibile per $1 + \lambda^2$. Ma allora la frazione con cui — a norma della (15) — si esprime μ pel cerchio osculatore riducesi ad un polinomio di primo grado in λ, sicchè, come asserito, al mutar di λ quel cerchio (13) varia in un fascio. Questo fascio risulta poi riferito omograficamente al fascio delle rette $y' = \lambda x'$, in quanto λ è coordinata proiettiva sia nell'uno che nell'altro fascio.

6. Per uno studio particolareggiato delle trasformazioni (10) rinviamo ad un lavoro successivo, ove verranno considerate estensioni di quelle a spazi di dimensione arbitraria.

Notiamo piuttosto che, poggiando sul lemma del n. 5, giungiamo nel modo seguente ad una *nuova dimostrazione* del teorema enunciato nel n. 1.

Sia S una qualunque superficie rappresentata su di un piano π, in guisa che alle geodetiche di S corrispondano cerchi su π. Fissato un qualunque punto P di S, possiamo notoriamente rappresentare S su di un piano ausiliario π', in modo che alle geodetiche di S uscenti da P corrispondano su π' le rette di un fascio [8]. Se ora applichiamo il lemma del n. 5 alla corrispondenza così risultante fra π' e π, vediamo che alle geodetiche di S uscenti da P corrispondono necessariamente su π cerchi di un fascio.

Dunque alle ∞^2 geodetiche di S corrispondono per ipotesi ∞^2 cerchi su π, e con questi — come s'è visto — si possono formare ∞^2 fasci, in corrispondenza ai singoli punti P di S. Ciò implica che tali ∞^2 cerchi formino una rete [9]. Basta allora riferire omograficamente questa rete di cerchi alla rete delle rette di un piano π_1, per ottenere fra π e π_1 una corrispondenza puntuale [10], mercè la quale S viene ad esser rappresentata geodeticamente su π_1. La superficie S risulta pertanto a curvatura costante, in forza del teorema stabilito dal BELTRAMI nel lavoro citato in principio di questa Nota.

[8] Cfr., per esempio, E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, II ed. (Paris, Gauthier-Villars, 1946), n. 213.

[9] Come si ha senz'altro riferendo omograficamente gli ∞^3 cerchi di π ai punti di un S_3, e rammentando che il piano è l'unica superficie su cui giacciano ∞^2 rette.

[10] Del tipo di quella rappresentata dalle (10).