M. Villa, C. Sangermano

Condizione affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3, in una coppia a jacobiano nullo, sia osculabile con una trasformazione cremoniana

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 23–30.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Condizione affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3, in una coppia a jacobiano nullo, sia osculabile con una trasformazione cremoniana.

Nota di M. VILLA e C. SANGERMANO (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale fra due* S_3 *si possa osculare, in una coppia a Jacobiano nullo di caratteristica* 2, *con una trasformazione cremoniana. Segue una condizione analitica (soltanto necessaria) per l'omaloidicità di un sistema lineare* ∞^3 *di superficie algebriche dell'* S_3.

1. Ho determinato recentemente una condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale fra due piani si possa osculare, in una coppia di punti corrispondenti a jacobiano nullo, con una trasformazione cremoniana ([1]).

Il presente lavoro, per la cui esecuzione mi sono valso della collaborazione del dott. SANGERMANO, risolve il problema analogo per le trasformazioni puntuali fra due spazi.

Si dimostra (nn. 2, 3, 4): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale* T *fra due spazi ordinari* S_3, S_3' *si possa osculare, in una coppia di punti corrispondenti* (O, O') *a jacobiano nullo di caratteristica 2* (O *punto semplice della jacobiana) con una trasformazione cremoniana, è che la retta stazio-*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

([1]) VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 136, 1947; VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a jacobiano nullo*, questo « Boll. », ser. III, vol. II, p. 3, 1947. Si veda anche: VILLA, *Proprietà caratteristiche delle reti omaloidiche*, questo « Boll. », ser. III, vol. III, p. 201 e « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. V, pp. 122, 231, 1948.

Per incidenza, aggiungo che il primo dei teoremi stabiliti in quest'ultimo mio lavoro s'estende e si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra una ipersuperficie algebrica di* $S_r (r > 2)$ *un sistema lineare* $\Sigma\, \infty^{r-1}$ *di* V_{r-2} *algebriche sia omaloidico è che la curva intersezione di* $r-2$ V_{r-2} *generiche di* Σ *intersechi la jacobiana* J *di* Σ *soltanto nei punti e nelle varietà base e che nei punti base* J *si comporti regolarmente.*

([2]) VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a jacobiano nullo*, questo « Boll. », ser. III, vol. II, p. 95, 1947.

naria (per O) (²) *sia tangente asintotica per le superficie corrispondenti ai piani per O′* (³).

L'osculazione si può sempre ottenere con trasformazioni cubiche, mentre, in generale, non si può ottenere con trasformazioni quadratiche (n. 4). Nel n. 5 si ottiene una condizione analitica (soltanto necessaria) per l'omaloidicità di un sistema lineare ∞^3 di superficie algebriche di S_3 applicando una condizione che deriva da quella espressa nel teorema precedente.

2. La condizione enunciata è necessaria. Sia T_0 una trasformazione cremoniana fra S_3, S_3'. Com'è noto (⁴), le coppie di punti corrispondenti (O, O') a jacobiano nullo (O punto semplice della superficie jacobiana di T_0 in S_3) si ottengono prendendo come punto O' un punto appartenente ad una curva fondamentale L', e quindi come punto O un punto (semplice per la jacobiana) giacente sulla curva razionale C corrispondente ad O'.

Notiamo subito che se L' è curva fondamentale r–pla $(r > 1)$, ai piani della stella di centro O corrispondono superficie aventi in O' punto doppio (almeno). Segue che affinchè in (O, O') l'jacobiano abbia caratteristica 2 è necessario che L' sia curva fondamentale semplice. In tal caso la retta stazionaria, essendo la retta corrispondente ad O', giace sopra tutte le superficie corrispondenti ai piani della stella di centro O', ed è quindi tangente asintotica per esse (⁵).

Dunque: affinchè T si possa osculare nella coppia (O, O') a jacobiano nullo di caratteristica 2, con T_0, è necessario che la retta stazionaria per O sia ivi tangente asintotica delle superficie corrispondenti ai piani della stella di centro O' (⁶). Quando ciò avviene si dirà che in (O, O') ha luogo, per T, il *caso cremoniano*.

3. Consideriamo la trasformazione puntuale T fra S_3, S_3'

$$x' = f(x, y, z), \qquad y' = \varphi(x, y, z), \qquad z' = \psi(x, y, z);$$

nella coppia (O, O') l'jacobiano di T sia nullo di caratteristica 2.

(³) Questo risultato è stato comunicato, nel settembre 1948, al III Congresso dell'U. M. I., a Pisa.

(⁴) Si veda: CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*, « Annali di Matematica », ser. II, vol. II, pp. 131-140.

(⁵) La retta stazionaria appartiene alla superficie jacobiana e quindi anche al piano tangente in O alla jacobiana.

(⁶) Si ha, più in generale: *Condizione necessaria affinchè una trasformazione puntuale* T *sia approssimabile fino all'intorno d'ordine* s, *in una coppia* (O, O′) *a jacobiano nullo di caratteristica* 2, *con una trasformazione*

Con una opportuna scelta di alcuni elementi dei sistemi di riferimento proiettivo nei due spazi ([7]), le equazioni di T, nell'intorno di (O, O'), si possono scrivere:

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= mx + a_{11}x^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3]\\
y' &= my + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3]\\
z' &= \qquad\qquad\qquad c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3],
\end{aligned}
$$

dove

$$a_{11} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} = b_{22} + b_{33} + 2b_{12} + 2b_{13} + 2b_{23},$$
$$c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23} = 0,$$

indicando con [3] i termini degli sviluppi in serie di grado > 2. Se nella coppia (O, O') ha luogo per T il caso cremoniano, si ha

$$a_{33} = b_{33} = c_{33} = 0 \text{ ([8])}.$$

Ad un piano generico per l'asse y', $z' = \lambda x'$, corrisponde una superficie segata dal piano tangente $(x = 0)$ nella curva

$$x = (c_{23} - \lambda a_{23})yz + [3] = 0\,;$$

cremoniana, è che la retta stazionaria (per O'*) abbia in* O *contatto d'ordine* s *con le superficie corrispondenti ai piani della stella di centro* O'.

([7]) Come nelle coppie a jacobiano $\neq 0$, anche nelle coppie (O, O') a jacobiano nullo esistono rette per O (*rette caratteristiche*) tali che ogni E_2 di flesso avente per tangente una di esse viene trasformato da T in un E_2 di flesso; diremo pure *rette caratteristiche* (per O') le rette tangenti in O' agli E_2 di flesso corrispondenti agli E_2 appartenenti alle rette caratteristiche per O.

In generale, in una coppia (O, O') a jacobiano nullo di caratteristica 2 di una generica trasformazione puntuale T, le rette caratteristiche per O (e per O') sono 6; le rette caratteristiche per O' giacciono nel piano stazionario (cfr. VILLA, op. cit. nella nota 2). Ciò posto, nel riferimento a cui si allude nel testo, si assume come asse z la retta stazionaria e come assi x, y e retta $x = y = z$ tre rette caratteristiche, come piano $x'y'$ il piano stazionario e, in questo, come assi x', y' e retta $x' = y'$ le tre rette caratteristiche corrispondenti a quelle.

Fra ogni coppia di rette caratteristiche corrispondenti, la T subordina una corrispondenza approssimata fino all'intorno del secondo ordine di (O, O') da una proiettività (*proiettività caratteristica*).

([8]) Segue che la direzione cuspidale (VILLA, op. cit. nella nota 2) risulta qui indeterminata (all' E_2 di flesso della retta stazionaria corrisponde un elemento di curva avente in O' punto triplo). Inoltre, dalla condizione $c_{33} = 0$, segue, come già si è detto, che la retta stazionaria $(x = y = 0)$ giace sul piano jacobiano $(c_{13}x + c_{23}y = 0)$.

l'unico piano per y' tale che la corrispondente calotta sia inflessionale si ha per $\lambda = \frac{c_{23}}{a_{23}}$, ed è quindi

$$a_{23}z' - c_{23}x' = 0.$$

Analogamente, l' unico piano per x' tale che la calotta corrispondente sia inflessionale è

$$b_{13}\, z' - c_{13}y' = 0.$$

Assumendo i suddetti piani come $x' = 0$, $y' = 0$ rispettivamente, si ha

$$a_{23} = b_{13} = 0.$$

Si assumerà inoltre come *punti impropri* delle rette (caratteristiche) $x' = z' = 0$, $y' = z' = 0$, $x' - y' = z' = 0$ i corrispondenti dei *punti impropri* delle rette (caratteristiche) $x = z = 0$, $y = z = 0$, $x = y = z$ nelle relative proiettività caratteristiche, e come punto unità in S_3 il corrispondente del punto unità della retta

$$x' - y' = z' = 0$$

nella proiettività caratteristica relativa alla coppia di rette (caratteristiche) $x = y = z$, $x' - y' = z' = 0$.

Con tale scelta, si ha

$$a_{11} = b_{22} = 2a_{12} + 2a_{13} = 2b_{12} + 2b_{23} = 0, \quad m = 1.$$

Nel caso cremoniano, le (3.1) possono dunque scriversi

$$\begin{aligned} x' &= x + 2ax(y - z) + [3] \\ y' &= y + 2by(x - z) + [3] \\ z' &= \qquad 2cx(y - z) + 2dy(x - z) + [3], \end{aligned} \tag{3.2}$$

avendo posto

$$a_{12} = a, \quad b_{12} = b, \quad - c_{13} = c, \quad - c_{23} = d \ (^9).$$

Le rette caratteristiche uscenti da O sono rappresentate complessivamente dal sistema

$$\begin{cases} axy(y - z) - bxy(x - z) = 0 \\ cx\ (y - z) - dy(x - z) = 0 \end{cases}$$

e quindi, prescindendo dalla retta stazionaria, si riducono a quattro.

[9] Notiamo, incidentalmente, che i rapporti d/c, b/a sono invarianti proiettivi di T in (O, O'); è immediata la loro interpretazione geometrica come birapporti.

4. Consideriamo fra S_3, S_3' la notissima trasformazione cubica $\overline{T}$ che si costruisce assegnando tre reciprocità fra i due spazi e facendo corrispondere al punto P di S_3 il punto P' di S_3' intersezione dei tre piani corrispondenti di P nelle tre reciprocità assegnate. Com' è noto, ai piani di uno degli spazi (ad es. S_3) corrispondono nell'altro (S_3') superficie cubiche aventi in comune una curva del sesto ordine C_6' (e di genere 3), la quale è il luogo dei punti singolari della trasformazione. Ad un generico punto di C_6' corrispondono in S_3 gli ∞^1 punti di una retta t trisecante della sestica C_6 (analoga a C_6'), e il luogo delle rette t costituisce la superficie jacobiana J di $\overline{T}$ in S_3.

Sia (O, O') una coppia di punti corrispondenti in $\overline{T}$ a jacobiano nullo (O punto semplice di J non appartenente a C_6).

La retta t per O di J è la retta stazionaria di $\overline{T}$ in (O, O').

Le rette caratteristiche di $\overline{T}$ uscenti da un punto generico di S_3 sono le sette corde della sestica C_6 uscenti dal punto [10].

Delle sette corde uscenti da O, tre coincidono con la retta stazionaria t e rimangono quindi quattro rette caratteristiche per O.

Siano

$$\Sigma\alpha_{ik}{}^{m}x_i x_k' = 0 \qquad (m = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.1}$$

le equazioni delle tre reciprocità che individuano $\overline{T}$ (le x_i, x_k' coordinate proiettive omogenee risp. in S_3, S_3'; $i, k = 1, 2, 3, 4$).

Affinchè $\overline{T}$ osculi la data trasformazione puntuale T nella coppia (O, O') a jacobiano nullo di caratteristica 2, è necessario (e sufficiente) che introducendo gli sviluppi (3.2) di T nelle (4.1), si annullino i coefficienti dei termini di grado ≤ 2.

Eseguendo i calcoli si perviene alle condizioni

$$\alpha_{44}{}^m = \alpha_{43}{}^m = \alpha_{11}{}^m = \alpha_{22}{}^m = \alpha_{14}{}^m + \alpha_{41}{}^m = \alpha_{24}{}^m + \alpha_{42}{}^m = 0, \tag*{(4.2)$_1$}$$

$$\alpha_{13}{}^m - 2a\alpha_{14}{}^m - 2c\alpha_{34}{}^m = \alpha_{23}{}^m - 2b\alpha_{24}{}^m - 2d\alpha_{34}{}^m = 0, \tag*{(4.2)$_2$}$$

$$\alpha_{12}{}^m + \alpha_{21}{}^m + 2a\alpha_{14}{}^m + 2b\alpha_{24}{}^m + 2(c + d)\alpha_{34}{}^m = 0. \tag*{(4.2)$_3$}$$

Introducendo le $(4.2)_1$ e $(4.2)_2$ nelle (4.1) e passando a coordinate non omogenee, le (4.1) divengono

$$\begin{aligned} &\alpha_{12}{}^m yx' + \alpha_{21}{}^m y'x + (\alpha_{31}{}^m x + \alpha_{32}{}^m y + \alpha_{33}{}^m z)z' + \\ &+ \alpha_{14}{}^m(x' - x + 2ax'z) + \alpha_{24}{}^m(y' - y + 2by'z) + \\ &+ \alpha_{34}{}^m(z' + 2cx'z + 2dy'z) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove le $\alpha_{12}{}^m$, $\alpha_{21}{}^m$ $(m = 1, 2, 3)$ sóddisfano alle condizioni $(4.2)_3$.

[10] VILLA, *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane.* « Rend. di Matematica », ser. V, vol. III, p. 216, 1942.

Di qui, sostituendo alle (4.3) opportune combinazioni lineari di esse, si trae che le trasformazioni cubiche $\overline{T}$ osculatrici la T in $(O,\ O')$ sono le seguenti

$$x' - x - 2a(y - z)x' + \lambda_0(xy' - yx') + (\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z)z' = 0$$

$$y' - y - 2b(x - z)y' + \mu_0(xy' - yx') + (\mu_1 x + \mu_2 y + \mu_3 z)z' = 0$$

$$z' + 2z(cx' + dy') + \nu_0(xy' - yx') + (\nu_1 x + \nu_2 y + \nu_3 z)z' - (c+d)(xy' + yx') = 0,$$

le λ_h, μ_h, ν_h $(h = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ essendo costanti arbitrarie.

Segue: *le trasformazioni cubiche* $\overline{\mathrm{T}}$ *osculatrici la* T *in* (O, O') *sono* ∞^{12}.

Si noti che, in generale, non esistono trasformazioni quadratiche che osculano T in $(O,\ O')$ poichè, mentre le direzioni caratteristiche di T uscenti da O sono quattro, *in una trasformazione quadratica* T_2, *in una coppia* (O, O') *a jacobiano nullo di caratteristica* 2 *(*O *semplice per la jacobiana), le direzioni caratteristiche uscenti da* O *sono* ∞^1 *se* T_2 *è di 1ª o di 2ª specie, oppure sono tre se* T_2 *è di 3ª specie* [11].

[11] Infatti, nella trasformazione quadratica di prima specie i due spazi S_3, S_3' sono nelle stesse condizioni e, in ciascuno di essi, si hanno un punto singolare P e una conica singolare C. Se O è un punto del cono proiettante C da P (cono che col piano π di C costituisce la jacobiana), le rette caratteristiche uscenti da O sono le generatrici del cono proiettante C da O (O non appartiene a π) mentre la OP è la retta stazionaria (cfr. VILLA, op. cit. nella nota 10).

Nella trasformazione quadratica di seconda specie, in S_3 si hanno una retta d (doppia) e tre rette a_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, appoggiate a d, singolari, in S'_3 una retta d' e tre punti P'_i singolari. Se O è un punto della quadrica Q luogo delle rette che si appoggiano alle a_i (Q assieme ai piani da_i contati due volte costituisce la jacobiana), le rette caratteristiche uscenti da O sono le ∞^1 rette che si appoggiano a d, mentre la generatrice di Q per O che s'appoggia alle a_i è la retta stazionaria. Se O appartiene ad uno dei tre piani $d'P_i'$, ad es. $d'P_1'$ (i piani $d'P_i'$ e il piano dei punti P_i' costituiscono la jacobiana) le rette caratteristiche uscenti da O sono le OP_2', OP_3' e le ∞^1 rette che si appoggiano a d' (cfr. VILLA, op. cit. nella nota 10).

Infine, nella trasformazione quadratica di terza specie, in S_3 si hanno tre rette d_i (doppie, concorrenti in un punto P) e una conica C singolari, in S_3' quattro punti P_i', P' e un piano π' per P' singolari. Se O appartiene a π' (π' e i tre piani individuati da P' e da due dei punti P_i' costituiscono la jacobiana), le rette caratteristiche uscenti da O sono le tre rette OP_i', mentre la OP' è la retta stazionaria. La jacobiana in S_3 è una superficie doppia (Cfr. VILLA, op. cit. nella nota 10).

5. - Dato in S_3 un sistema lineare $\Sigma\ \infty^3$ di superficie algebriche, si dirà *retta stazionaria* in un punto semplice P della superficie jacobiana la tangente comune in P alle superficie di Σ passanti per P. Dai nn. 2, 3 segue:

Condizione necessaria affinchè un sistema lineare ∞^3 di superficie algebriche dell' S_3 (d'ordine $n > 1$), a jacobiana non indeterminata, sia omaloidico è che, in ogni punto semplice della superficie jacobiana del sistema, la retta stazionaria appartenga al piano ivi tangente alla jacobiana.

Si ha pure:

Dati quattro polinomi f, φ, ψ, χ, omogenei e dello stesso grado $n > 1$ nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, linearmente indipendenti, a jacobiano J non identicamente nullo, condizione necessaria affinchè la trasformazione $y_1 = f$, $y_2 = \varphi$, $y_3 = \psi$, $y_4 = \chi$ sia cremoniana è che i polinomi f, φ, ψ, χ siano tali che il polinomio

$$
(5.1) \qquad \begin{vmatrix} f\varphi_1 - \varphi f_1 & f\varphi_2 - \varphi f_2 & f\varphi_3 - \varphi f_3 \\ f\psi_1 - \psi f_1 & f\psi_2 - \psi f_2 & f\psi_3 - \psi f_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{vmatrix}
$$

sia divisibile per J oppure sia identicamente nullo ([12]).

Infatti, consideriamo il sistema lineare $\Sigma\ \infty^3$

$$
(5.2) \qquad \lambda f + \mu\varphi + \nu\psi + \rho\chi = 0,
$$

λ, μ, ν, ρ parametri. Sia $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ un punto semplice della superficie jacobiana $J = 0$ del sistema. La superficie generica della rete R che il punto P stacca dal sistema Σ ha per equazione la (5.2) dove

$$
(5\text{-}3) \qquad \lambda\bar{f} + \mu\bar{\varphi} + \nu\bar{\psi} + \rho\bar{\chi} = 0
$$

(in cui $\bar{f}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ sono i valori assunti in P dai polinomi f, φ, ψ, χ).

Ricavando dalla (5.3), per fissare le idee, il parametro λ, la superficie generica di R può scriversi

$$
(5.4) \qquad \mu(\bar{f}\varphi - \bar{\varphi}f) + \nu(\bar{f}\psi - \bar{\psi}f) + \rho(\bar{f}\chi - \bar{\chi}f) = 0.
$$

Siccome due delle tre superficie che individuano R (ad es. la $\bar{f}\varphi - \bar{\varphi}f = 0$ e la $\bar{f}\psi - \bar{\psi}f = 0$) hanno in P punto semplice, la retta stazionaria, asse dei fascio dei piani tangenti in P alle superficie

([12]) Con indici in basso si indicano derivate parziali rispetto ad x_1, x_2, x_3, x_4 (così, ad es. $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, ecc.).

di R, ha le equazioni

$$\sum_i (\bar{f}\,\bar{\varphi}_i - \bar{\varphi}\,\bar{f}_i)x_i = \sum_i (\bar{f}\,\bar{\psi}_i - \bar{\psi}\,\bar{f}_i)x_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Affinchè questa retta e il piano jacobiano

$$\sum_i \bar{J}_i x_i = 0$$

si appartengano è necessario e sufficiente (dato che la retta e il piano hanno in comune già il punto P) che si abbia

$$\text{(5.5)} \qquad \begin{vmatrix} \bar{f}\,\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}\,\bar{f}_j \\ \bar{f}\,\bar{\psi}_j - \bar{\psi}\,\bar{f}_j \\ \bar{J}_j \end{vmatrix} = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)\ (^{13})$$

Se il sistema (5.2) è omaloidico, la condizione (5.5) deve essere soddisfatta in ogni punto semplice della jacobiana, il che avviene appunto quando e solo quando il polinomio (5.1) è divisibile per J oppure è identicamente nullo ([14]).