Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Castoldi

Sulla esatta risoluzione di un classico problema

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 30–33.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_30_0>

Sulla esatta risoluzione di un classico problema.

Estratto di una lettera di LUIGI CASTOLDI (a Genova)
al prof. A. SIGNORINI.

Sunto. - *Rimuovendo qualche dubbio recentemente sollevato, si conferma la validità della soluzione data dal compianto Professor* LEVI CIVITA *ad un classico problema di Meccanica razionale*

... Leggo nell'ultimo fascicolo del Bollettino dell'Unione Matematica italiana una Nota del Dott. U. DAL BUONO [1] attorno a

([13]) Questa condizione è senz'altro soddisfatta nei punti multipli della superficie jacobiana.

([14]) Altre condizioni (in generale) equivalenti si hanno sostituendo al determinante (5.1) uno dei determinanti analoghi ottenuti ponendo χ al posto di φ o di ψ, oppure partendo, anzichè dalla (5.4), da una delle tre equazioni seguenti

$$\lambda(\bar{\varphi}f - \bar{f}\varphi) + \nu(\bar{\varphi}\psi - \bar{\psi}\varphi) + \rho(\bar{\varphi}\chi - \bar{\chi}\varphi) = 0$$
$$\lambda(\bar{\psi}f - \bar{f}\psi) + \mu(\bar{\psi}\varphi - \bar{\varphi}\psi) + \rho(\bar{\psi}\chi - \bar{\chi}\psi) = 0$$
$$\lambda(\bar{\chi}f - \bar{f}\chi) + \mu(\bar{\chi}\varphi - \bar{\varphi}\chi) + \nu(\bar{\chi}\psi - \bar{\psi}\chi) = 0.$$

([1]) U. DAL BUONO - *Sulla risoluzione di un classico problema.* « Bollettino della Unione Matematica Italiana ». Ser. III, anno III, n. 3, pp. 248-250.

un problema di Meccanica già risolto dal LEVI CIVITA nelle sue Classiche Lezioni: quello del moto di una catenella omogenea pesante, avvolta sopra una puleggia, pendula da un lato e poggiante, ammucchiata, dall'altro lato su un sostegno fisso. Poichè il risultato cui il DAL BUONO perviene impiegando il concetto di sistema di massa variabile diverge da quello del LEVI CIVITA, ritengo doveroso confermare l'esattezza della soluzione data al problema dal tanto compianto Maestro.

A tale scopo — a prescindere da considerazioni generali attorno a una corretta impostazione dei problemi di «*massa variabile* », di cui dirò in seguito, e che provano non valida l'argomentazione del DAL BUONO per giungere alla sua formula (1) — osservo che l'inaccettabilità di quest'ultima risulta subito ricorrendo alla impostazione che Lei dà nel più recente suo libro di Meccanica ([2]) al problema del moto di una corda pesante che scivoli, in piano verticale, su un sostegno privo di attrito. Infatti, la formula (34) della Sua esposizione, colle notazioni del DAL BUONO e colle ulteriori designazioni:

y, quota verticale discendente dal generico punto della catenella C;

s, arco lungo il pensabile profilo (ad U capovolto) percorso da C nel suo moto, contato dal punto ove la catena si appoggia accumulata al sostegno fisso;

τ, tensione nel generico punto di C,

si scrive:

$$\nu\dot{v} = \nu g \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s}, \tag{1}$$

y e τ essendo funzioni di s e del tempo.

Con riferimento a un generico istante t, integrando la (1) lungo l'intera porzione l_t di catena attualmente «*non accumulata*», si ottiene

$$\nu\dot{v}(k + x) = \nu g(x - k) - T, \tag{2}$$

ove T è la trazione cui è soggetta la catena nel punto che attualmente si distacca dalla parte ammucchiata.

Il confronto della presente (2) colla richiamata (1) del DAL BUONO mostra che in quest'ultima il termine νv^2 del primo membro riesce ingiustificato.

L'intima ragione di questa divergenza, nonchè la circostanza che alla trazione T deve attribuirsi il valore νv^2 (già determinato

([2]) A. SIGNORINI - *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*. Vol. II, p. 259. (Roma; 1948).

dal LEVI CIVITA) riescono chiarite dalla seguente precisazione della nozione di sistema di massa variabile.

Ad un sistema materiale S composto di masse m_i si aggregano, durante l'intervallo elementare di tempo dt, masse dm_j costituenti un insieme dS. Denoto $F_i^{(e)}$ e con $dF_j^{(e)}$ le forze agenti rispettivamente su S e dS e provenienti dall'insieme dei sistemi esterni tanto ad S che a dS. Il fenomeno considerato avviene, in generale, con brusca variazione $\Delta v_j = v_i^+ - v_j^-$ delle velocità delle masse aggregate e senza apprezzabile modificazione della loro posizione, cosicchè ad esso compete la proprietà caratteristica dei fenomeni d'urto o di strappo.

I teoremi delle quantità di moto e del momento delle quantità di moto, applicati in un generico istante t al sistema $S + dS$ delle masse m_i e dm_j, danno ovviamente, con O fisso:

$$\sum_i m_i dv_i + \sum_j dm_j \Delta v_j = \sum_i F^{(e)} dt + \sum_j dF_j^{(e)} dt; \tag{3}$$

$$\sum_i m_i (P_i - O) \wedge dv_i + \sum_j dm_j (P_j - O) \wedge \Delta v_j = \tag{4}$$

$$= \sum_i (P_i - O) \wedge F_i^{(e)} dt + \sum_j (P_j - O) \wedge dF_j^{(e)} dt,$$

giacchè l'interazione tra S e dS è palesemente interna ad $S + dS$.

Nel caso particolare, spesso, ma non sempre, verificato che le forze $dF_j^{(e)}$ siano dell'ordine di grandezza delle masse dm_j e queste infinitesime con dt, i teoremi precedenti diventano

$$\sum_i m_i dv_i = \sum_i F_j^{(e)} dt - \sum_j dm_j \Delta v_j \tag{3'}$$

$$\sum_i m_i (P - o) \wedge dv_i = \sum_i (P_i - o) \wedge F^{(e)} dt - \sum_j dm_j (P_j - o) \wedge \Delta v_j, \tag{4'}$$

e possono esprimersi dicendo che il moto del sistema avviene, istante per istante, come se la sua massa rimanesse invariata ma su esso agisse un sistema supplementare di forze (« *trazioni di avvio* ») di risultante $- \sum dm_j \Delta v_j$ e di momento risultante $- dm_j (P_j - o) \wedge \Delta v_j$. A questo punto di vista si è attenuto il LEVI CIVITA, se bene interpreto il suo pensiero, nelle citate Lezioni (vol. II, parte 1ª; p. 421).

D'altra parte le (3'), (4') possono anche scriversi:

$$\sum_i m_i dv_i + \sum_j dm_j \Delta v_j = \sum_i F_i^{(e)} dt, \tag{3''}$$

$$\sum_i m_i (P_i - O) \wedge dv_i + \sum_j dm_j (P_j - O) \wedge \Delta v_j = \sum_{i'} (P_i - O) \wedge F^{(e)} dt \tag{4''}$$

venendo così concepito il problema come propriamente di « massa variabile ». Naturalmente, tra le forze esterne *non* compaiono ora più le predette trazioni di avvio, le quali, anzi, cessano di figurare come facenti parte della sollecitazione attiva applicata al sistema.

Da questo punto di vista, al quale si attiene il DAL BUONO nella trattazione del problema che ci interessa, il tratto l_t' della catena, compreso, in un generico istante, tra la carrucola e la parte accumulata, può concepirsi come un sistema di massa variabile. Ad esso si aggrega nel tempo dt, con brusco incremento $\Delta v = v$ della velocità, la massa $\nu v dt$ che si distacca dalla parte accumulata, mentre, nello stesso tempo, e con $\Delta v = o$, cessa di farne parte una massa uguale laddove ha inizio l'appoggio della catena alla carrucola,

Applicando la (3″) a questo tratto, dopo aver denotata con $\boldsymbol{R}$ la la trazione su l_t' da parte della porzione di catena appoggiata alla carrucola, con riferimento alle componenti sull'asse y, si ottiene

(5) $$\nu k\dot{v} + \nu\dot{v}^2 = R - \nu g k.$$

Analogamente per il tratto pendulo l_t'', osservando che ad esso unicamente si aggregano masse senza discontinuità alcuna per la velocità, si trae

(5′) $$\nu x\dot{v} = \nu g x - R,$$

con la quale contrasta la seconda formula della Nota in discussione.

Dalle (5) e (5′) segue poi immediatamente l'equazione del moto

(6) $$\nu(k + x)\dot{v} + \nu v^2 = \nu g(x - k)$$

che è, sostanzialmente, quella già stabilita dal LEVI CIVITA.

La (5), trasportandovi nel secondo membro il temine νv^2 precisa in $T = \nu v^2$ il valore della trazione d'avvio, ancora conformemente al risultato dell'illustre Autore.

Più direttamente, salvo la precisazione del valore di T. alle stesse conclusioni si perviene ricorrendo di nuovo alla Sua citata formula (34), la quale, integrata lungo il tratto l_t' dà subito

(7) $$\nu k\dot{v} = R - T - \nu k g,$$

daccordo con (5) e colla prima relazione del DAL BUONO, mentre, integrata su l_t'', dà

(7′) $$\nu x\dot{v} = \nu g x - R,$$

confermando la validità della (5′). ...

Nota alle bozze. - Mi è gradito dovere esprimere quì la mia riconoscenza al Professor ANTONIO SIGNORINI, alle cui acute, cortesi osservazioni è dovuto molto della definitiva stesura della presente lettera.