Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Sbrana

Sugli operatori funzionali multipli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 34–40.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_34_0>

Sugli operatori funzionali multipli.

Nota di Francesco Sbrana (a Genova).

Sunto - *Facendo uso di una rappresentazione esponenziale dello zero, che riteniamo nuova, e di una estensione del teorema di* Sommerfeld *sulla rappresentazione di una funzione per mezzo di un integrale, ci proponiamo di mostrare come il metodo degli operatori multipli consenta di pervenire all'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali (a coefficienti costanti).*

1. È noto che per la integrazione *mediante integrali definiti* delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti che si presentano nella Fisica Matematica è stato utilmente impiegato in diversi casi il metodo degli operatori funzionali di Heaviside in una variabile (1). È anche noto che per poter applicare questo metodo è necessario scegliere una delle variabili indipendenti come variabile privilegiata; e ciò consente di risolvere soltanto problemi al contorno particolari. Il metodo stesso non si presta per la integrazione delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Questi inconvenienti vengono eliminati, *ottenendosi sempre le soluzioni espresse mediante integrali definiti*, se si ricorre agli operatori funzionali in più variabili, od *operatori multipli* (2). L'impiego di questo procedimento è agevolato con la introduzione di una conveniente rappresentazione esponenziale dello zero, che credo nuova, e di una estensione del teorema

(1) Cfr. G. Giorgi, *Sugli integrali di propagazione in una dimensione*, « Rend. del Circolo Matem. di Palermo », t. LII, (1928), pp. 263-312; F. Sbrana, *Sui problemi di propagazione in una dimensione*, « Memoria della R. Accademia Naz. dei Lincei », s. VI, vol. V, fasc. VI, pp. 221-251.

(2) F. Sbrana, *Sopra alcune estensioni del calcolo degli operatori funzionali*, « Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze », *XXI* Riunione, Roma, 1932, vol. II, pp. 1-10; *Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti*, « Atti della Soc. Ligustica di Scienze e Lettere », vol. XIII, fasc. III-IV, pp. 1-35.

Qualche esempio di applicazione del metodo degli operatori multipli si trova nel *Trattato sulle equazioni differenziali* del Forsyth. Successivamente il D'Arcais ha indicato un metodo simbolico, basato su certi sviluppi in serie, « Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. XVII, 1907-1908, disp. 2ª, p. 191 e seguenti); esso è stato impiegato da B. Segre di SOMMERFELD, per la rappresentazione esponenziale di una funzione mediante un integrale multiplo (³). In alcune Note, in corso di stampa negli « Atti della Società Ligure di Scienze e Lettere », ho indicato diverse applicazioni, principalmente per equazioni di tipo ellittico, in due o più variabili indipendenti, ed anche per sistemi di equazioni (alle derivate parziali) in più incognite. Ma il metodo può essere usato con successo anche per le eqnazioni a caratteristiche reali, come mi propongo di mostrare ora con un esempio. In maniera uniforme si ottengono formule analoghe alla formula di GREEN, determinando contemporaneamente la cosidetta *soluzione fondamentale* (alla quale di solito si perviene per tentativi, senza seguire una regola generale).

2. Introdotto nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y, di origine 0, e un' unità di misura delle lunghezze, se l è una linea generalmente regolare, cioè dotata di tangente variabile con continuità, eccettuato eventualmente un numero finito di punti angolosi, $Q(\xi, \eta)$ un punto generico di l, $g(\xi, \eta)$ una funzione continua di Q, $P(x, y)$ un punto generico del piano fuori di l, si ha

$$(1)\quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon(\omega_1^2+\omega_2^2)} d\omega_1 d\omega_2 \int_l g(\xi, \eta) e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)} ds = 0,$$

dove ε assuma valori soltanto positivi, c_1 e c_2 siano due costanti qualunque, che riterremo pure positive, ω_h, per $h = 1, 2$, una variabile complessa il cui punto immagine nel piano di GAUSS percorre la parallela all' asse immaginario definita dai punti $c_h - i\infty$, $c_h + i\infty$; s è la lunghezza dell' arco lungo la l, contato a partire da una determinata origine.

Sia ora A un' area connessa, quadrabile, contenuta nel piano xy, limitata da un numero finito di linee chiuse, generalmente rego-

senza ricorrere a sviluppi in serie, per *sistemi* di equazioni a derivate parziali *con una sola incognita*, (« Rend. Lincei » , s. sesta, v. XXVII, 1938, p. 208 e seg.). Queste indicazioni sono state fornite dai proff. LAURA e TONOLO, che ringrazio vivamente. Da tali ricerche si distaccano quelle da me intraprese, che hanno come scopo ultimo l' integrazione delle equazioni citate (mediante il metodo simbolico), con assegnate condizioni al contorno.

(³) Per il caso degli operatori semplici, cfr.: D. GRAFFI, *Considerazioni sul metodo degli operatori funzionali*, « Memoriae Pont. Acad. Scient. Novi Lincaei », ex s. III, vol. II, pp. 211-262.

lari, come la l di cui si è detto sopra, ed $f(x, y)$ una funzione continua nei punti interni di A, limitata in A, contorno compreso. Si ha allora

$$(2)\quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon(\omega_1^2+\omega_2^2)} d\omega_1 d\omega_2 \int_A f(\xi, \eta) e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)} d\xi d\eta = \begin{cases} f(x, y), \\ 0, \end{cases}$$

secondochè $P(x, y)$ è interno od esterno ad A.

La dimostrazione delle (1), (2) si trova nelle Note in corso di stampa cui si è accennato sopra.

3. Consideriamo l'equazione differenziale

$$\frac{1}{E} u(x, y) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

o più in generale

$$\frac{1}{E} u(x, y) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

con n intero maggiore di uno. Dalle (1), (2), se $P(x, y)$ è fuori di l, ed A è il campo del piano xy in cui valgono per la $f(\xi, \eta)$ le ipotesi del n. prec., si ha rispettivamente

$$(3)\quad u(x, y) = E[0] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon(\omega_1^2+\omega_2^2)} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1^n - \omega_2} \int_l g(\xi, \eta) e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)} ds,$$

$$(4)\quad u(x, y) = Ef(x, y) =$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon(\omega_1^2+\omega_2^2)} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1^n - \omega_2} \int_A f(\xi, \eta) e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)} d\xi d\eta + E[0].$$

Nella (4) si deve ritenere (x, y) interno ad A, ed $E[0]$ espresso per mezzo della (3), con una linea l che non abbia punti interni ad A. Per semplicità ci occuperemo solo della (3), potendosi la (4) discutere in modo analogo.

4. Consideriamo dapprima il caso dell'equazione del calore, $(n = 2)$. Essendo lecito nella (3) lo scambio nell'ordine delle integrazioni, si ha

$$(5)\qquad u(x, y) = E[0] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_l g(\xi, \eta) H(x-\xi, y-\eta; \varepsilon) ds,$$

con

$$(6)\quad H(x-\xi, x-\eta; \varepsilon) = \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} e^{\varepsilon\omega_1^2+\omega_1(x-\xi)} d\omega_1 \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon\omega_2^2+\omega_2(y-\eta)} \frac{d\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2}.$$

Se si pone $c_1 = 1$, $c_2 > 1$, la parte reale di $\omega_2 - \omega_1^2$ risulta positiva. È quindi

$$\frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2} = -\int_0^{+\infty} e^{(\omega_1^2-\omega_2)t}\, dt,$$

e per conseguenza

$$(7)\quad \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon\omega_2^2+\omega_2(y-\eta)} \frac{d\omega_2}{\omega_1^2-\omega_2} = -\int_0^{+\infty} e^{\omega_1^2 t}dt \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon\omega_2^2+\omega_2(y-\eta-t)}\, d\omega_2 .$$

D'altra parte si ha

$$\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon\omega_2^2+\omega_2(y-\eta-t)}\, d\omega_2 = e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\varepsilon\left(\omega_2+\frac{y-\eta-t}{2\varepsilon}\right)^2} d\omega_2 = i\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\, e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}};$$

perciò dalle (6), (7) si ricava

$$H(x-\xi, y-\eta; \varepsilon) = -i\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}} dt \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} e^{\omega_1^2(\varepsilon+t)+\omega_1(x-\xi)}\, d\omega_1,$$

ossia

$$(8)\quad H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon) = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\varepsilon+t)}} \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon+t}} .$$

Notiamo ora che

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\varepsilon+t)}} \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon+t}} < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta-t)^2}{4\varepsilon}} dt = 2\int_{\frac{\eta-y}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha .$$

Quindi se esiste un numero positivo m tale che lungo l sia $\eta - y > m$, si ha dalle (8)

$$(0<)H(x-\xi,\ y-\eta.\ \varepsilon) < \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\frac{m}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha .$$

Il 2° membro tende a zero per $\varepsilon \to 0$, quindi $H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon)$ tende uniformemente a zero lungo l. Ciò prova che se la retta $\eta = y$ è al disotto della linea l, senza però incontrarla, risulta

$$(9)\qquad u(x, y) = \dot{E}[o] = 0.$$

Ma lo stesso risultato si ottiene anche se per es. la retta $\eta = y$ incontra la linea l in un punto C, e lascia al disopra tutti gli altri punti di l, purchè in un intorno di C la l sia incontrata in un sol punto dalle rette $\eta =$ costante, e sia limitato il rapporto $\frac{d\xi}{d\eta}$ (¹).

(¹) Poichè $P(x, y)$ non coincide con C, esiste un numero positivo q tale che nell'intorno considerato è $|x-\xi| > q$. Nell'intorno stesso, che indiche-

5. Supponiamo ora che lungo l sia $0 < m_1 < y - \eta < m_2$, con m_1, m_2 costanti. Intanto la (8) si può scrivere, ponendo

$$t - (y - \eta) = 2\alpha\sqrt{\varepsilon},$$

$$H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon) = 2\pi \int_{-\frac{y-\eta}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon})}} \frac{d\alpha}{\sqrt{y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon}}};$$

remo con I, supporremo inoltre

$$\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right| < n.$$

Riprendiamo ora la (8), ed osserviamo che essendo $\eta - y \geq 0$, si ha

$$e^{-\frac{(t+\eta-y)^2}{4\varepsilon}} \leq e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}};$$

è poi

$$e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\varepsilon+t)}} < \frac{4(\varepsilon+t)}{(x-\xi)^2} < \frac{4(\varepsilon+t)}{q^2}.$$

Risulta quindi, in I:

$$0 < H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon) < \frac{4\pi}{q^2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon+t}\, dt.$$

Posto $\varepsilon + t = 2\alpha\sqrt{\varepsilon}$, resta

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon+t}\, dt = 2\sqrt{2\sqrt{\varepsilon}} \int_{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}}^{+\infty} e^{-\left(\alpha-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)^2} \sqrt{\alpha}\, d\alpha < 2\sqrt{2\sqrt{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2+\alpha\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\alpha}\, d\alpha.$$

Supposto $\varepsilon < 1$, sarà

$$(0 <)\ H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon) < \frac{8\pi}{q^2}\sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha^2-\alpha)} \sqrt{\alpha}\, d\alpha.$$

Indicheremo con N il valore (finito) del 2° membro. Preso un punto B di l, contenuto in I, di ordinata $y - \delta$, la lunghezza dell'arco corrispondente l_1 limitato da B e C è minore di $\delta\sqrt{1+n^2}$. Perciò se lungo l è $|g(\xi, \eta)| < M$, si ha

$$\left|\int_{l_1} g(\xi,\eta) H(x-\xi,\ y-\eta;\ \varepsilon)\, ds\right| < MN\delta\sqrt{1+n^2} \tag{1}$$

Fissato ora un numero positivo σ arbitrario, basterà prendere $\varepsilon < 1$, e

$$\delta < \frac{\sigma}{2MN\sqrt{1+n^2}},$$

perchè il 1° membro della (1) sia minore di $\frac{\sigma}{2}$. Fissato δ, e quindi l_1, sia l_2

cosicchè risulta

$$\int_{-\frac{m_1}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon})}} \frac{d\pi}{\sqrt{y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon}}} < H(x-\xi,\ y-\eta\,;\ \varepsilon) <$$

$$< \int_{-\frac{m_2}{2\sqrt{\varepsilon}}}^{+\infty} e^{-\alpha^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon})}} \frac{d\alpha}{\sqrt{y-\eta+\varepsilon+2\alpha\sqrt{\varepsilon}}}.$$

Si trova dunque

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H(x-\xi,\ y-\eta\,;\ \varepsilon) = 2\pi\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}. \tag{10}$$

Risulta poi dalla (5), se lungo l è $y-\eta$ limitata, non negativa, (trascurando un inessenziale fattore costante),

$$u(x.\ y) = E[o] = \int_l g(\xi,\ \eta)\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\,ds, \tag{11}$$

(in accordo con risultati classici) [1].

6. Per $n > 2$ è lecito passare al limite nella (3, sotto i segni di integrazione. Risulta allora

$$E[o] = \int_l g(\xi,\ \eta)\ K(x-\xi,\ y-\eta)ds, \tag{12}$$

con

$$K(x-\xi,\ y-\eta) = \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_2(y-\eta)}\,\frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega_1^{\,n}-\omega_2}.$$

Ci limiteremo per semplicità ad esaminare il caso in cui è $n=3$. Supposto ancora $c_1=1$, $c_2>1$, la parte reale di $\omega_2-\omega_1^3$, se $\omega_1=1+i\lambda_1$, è data da

$$\mu = c_2 - 1 + 3\lambda_1^2,$$

l'arco rimanente di l. Per quanto si è dimostrato nel n. 4 si può determinare un ε_0 tale che per $\theta < \varepsilon_0$ sia

$$\int_{l_2}\left| g(\xi,\ \eta)H(x-\xi,\ y-\eta,\ \varepsilon)\,ds\right| < \frac{\sigma}{2}. \tag{2}$$

Per conseguenza, fissato σ, per ε minore di uno e di ε_0, valgono insieme le (1), (2). Ciò prova che sussiste la (9), c. v. d.

[1] Cfr. per es. VITO VOLTERRA, *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm*, Paris, 1912, 10ième leçon.

quindi positiva. Posto $\omega_2 - \omega_1^3 = \omega$, si ha

$$\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} e^{\omega_2(y-\eta)} \frac{d\omega_2}{\omega_1^3 - \omega_2} = - e^{\omega_1^3(y-\eta)} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{\omega(y-\eta)} \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 0, \\ -2\pi i e^{\omega_1^3(y-\eta)}, \end{cases}$$

secondochè $\eta > y$, ovvero $\eta < y$. Risulta quindi che se la retta $\eta = y$ è al disotto della linea l la funzione incognita si annulla; se invece la retta stessa è al disopra, sussiste la (12), (l'integrazione essendo estesa a quella parte di l in cui $\eta \leq y$), con

$$K(x-\xi,\ y-\eta) = -2\pi i \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} e^{\omega_1(x-\xi)+\omega_1^3(y-\eta)}\, d\omega_1 .$$

Si può quindi assumere come soluzione fondamentale la parte reale, o il coefficiente della i nel 2° membro.

Un risultato analogo è stato ottenuto da BLOCK e DEL VECCHIO, in seguito a laboriose ricerche (1).