Tullio Viola

Sui determinanti di Hurwitz d'un'equazione algebrica, i cui coefficienti sono polinomi dipendenti da quanti si vogliono parametri reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 40–45.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_40_0>

Sui determinanti di Hurwitz d'un'equazione algebrica, i cui coefficienti sono polinomi dipendenti da quanti si vogliono parametri reali.

Nota di TULLIO VIOLA (a Roma).

Sunto. - *Supposto che i coefficienti d'un'equazione algebrica siano polinomi (a coefficienti reali) d'un certo gruppo di* p *parametri reali* $u_1, u_2, \dots, u_p$ *si dànno alcune proprietà dell'insieme* Ω *dei punti* $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ *dello spazio reale* S_p, *in corrispondenza dei quali le radici dell'equazione risultano a parti reali non positive, e inoltre le eventuali radici a parti reali nulle risultano semplici.*

1. Ho pubblicato, alcuni anni or sono, una breve nota dal titolo: *Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti* (¹), nella quale ho richiamato il seguente teorema da me altrove dimostrato (²):

(¹) HENRIK BLOCK, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*, troisième Note; « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik », Bd. 8, n. 23, (1912); ETTORE DEL VECCHIO, *Sur deux problèmes d'intégration pour les équations paraboliques* $\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, ibidem, Bd. 11, n. 11, (1916).

(¹) « Rend. R. Accad. d'Italia, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali », serie VII, vol. I, fasc. 7, 1940, pp.238-244.

(²) *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali*, « Rend. R. Accad. delle Scienze di Napoli », serie IV, voll. VIII, 1937-38.

Condizioni necessarie e sufficienti affinchè un' equazione algebrica a coefficienti reali

$$c_0 z^h + c_1 z^{h-1} + c_2 z^{h-2} + \dots + c_{h-1} z + c_h = 0 \qquad (c_0 > 0) \tag{1}$$

si possa spezzare nel prodotto di altre due, delle quali la prima

$$b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \dots + b_k = 0 \qquad b_0 > 0) \tag{2}$$

risulti del tipo di Hurwitz *(abbia cioè tutte le radici con parte reale negativa), e la seconda contenga soltanto potenze pari:*

$$z^{2n} + a_2 z^{2n-2} + a_4 z^{2n-4} + \dots + a_{2n} = 0, \qquad (k + 2n = h), \tag{3}$$

oppure soltanto potenze dispari:

$$z^{2n+1} + a_2 z^{2n-1} + a_4 z^{2n-3} + \dots + a_{2n} z = 0, \qquad (k + 2n + 1 = h), \tag{3'}$$

sono:

a) *che i primi* k *determinanti di* Hurwitz *dell' equazione proposta siano* > 0;

b) *che la matrice indefinita, formata con le prime* k + 1 *colonne di quella di* Hurwitz, *abbia caratteristica* = k.

Ho avvicinato questo teor. ad altro dimostrato dal prof. C. Miranda [3], deducendone le condizioni affinchè un' equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti abbia tutti gli integrali stabili, al tendere all' infinito della variabile indipendente.

Nella seconda parte di quella mia nota (nn. 3–5, pp. 240–244), ho poi affrontato un altro problema. Ho supposto che i coefficienti della (1) siano *funzioni razionali intere (a coefficienti pure reali) d' un certo gruppo di* p *parametri reali:*

$$c_i = c_i(u_1, u_2, \dots, u_p), \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, h)$$

e ho indagato sulle prime proprietà dell' insieme Ω dei punti $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ dello spazio reale S_p, in corrispondenza dei quali gli integrali dell' equazione differenziale

$$c_0 y^{(h)} + c_1 y^{(h-1)} + c_2 y^{(h-2)} + \dots + c_{h-1} y' + c_h y = 0 \tag{4}$$

associata alla (1), risultano stabili.

Essendomi, in detta seconda parte, sfuggite alcune inesattezze, mi propongo di riprendere dal principio l' intero problema. In questa nota, di cui ho dato comunicazione nel recente Congresso

(3) C. Miranda, *Complementi al criterio di stabilità di* Hurwitz *e al teorema di* Sturm *sulle equazioni algebriche a coefficienti reali*, « Rend. del Semin. Matemat. della R. Università di Roma », serie IV, vol. I, fasc. 3, gennaio 1937.

dell'U. M. I. a Pisa, a rettifica di quelle inesattezze, mi limiterò ad una breve analisi dell'insieme indicato con Ω. Ma in un prossimo lavoro mi propongo d'approfondire ulteriormente il problema, essendomi convinto dell'importanza ch'esso riveste, non solo in sede teorica, ma anche in questioni d'interesse applicativo (come ho accennato al principio del n. 3 della nota citata e come l'ormai lunga esperienza presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ha ampiamente dimostrato).

2. È necessario osservare anzitutto che la trasformazione Σ la quale, ad ogni punto U di S_p, fa corrispondere il gruppo delle h radici

$$\alpha_1 \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_h$$

della (1) nel piano complesso, è certo *continua*. Con ciò intendiamo dire che, assegnati arbitrariamente un punto U_0 in S_p e un numero reale $\varepsilon > 0$, e indicate ordinatamente, nel piano $z = x + iy$, con $\alpha_1{}^0, \alpha_2{}^0, \ldots, \alpha_h{}^0$ le h radici della (1) corrispondenti ad U_0, è possibile trovare un $\delta > 0$ tale che, ad ogni U in S_p per cui $\overline{U_0 U} < \delta$, corrispondono h radici della (1) tutte contenute, una per ciascuna, negli h intorni circolari di centri rispettivamente $\alpha_1{}^0, \alpha^0{}_2, \ldots, \alpha_h{}^0$ e d'ugual raggio ε. Dicendo « una per ciascuna », non escludiamo l'esistenza di radici multiple, nel qual caso due o più delle radici s'intendono ripetute.

Osserviamo anche che, per proprietà ben note, l'insieme Ω si può identificare con *l'insieme di tutti i punti di* S_p, *in corrispondenza dei quali l'equazione* (1) *ha tutte le radici con parti reali non positive; e inoltre le eventuali radici a parti reali nulle, sono semplici*. In virtù della proprietà di continuità, or ora accennata, cui soddisfa la trasformazione Σ, si può immediatamente dedurre che, in corrispondenza d'un qualunque punto U_0 di $F\Omega$, che sia *estraneo ad* Ω, le radici della (1) devono tutte ancora avere le parti reali non positive. Infatti, se ad U_0 corrispondesse una radice con parte reale positiva, indicheremmo con ε un numero reale positivo minore di questa parte. Trovato allora il corrispondente numero δ come sopra, ad ogni U di S_p tale che $\overline{U_0 U} < \delta$, quindi anche ad ogni U di Ω soddisfacente a questa condizione (esistono di tali U, essendo U_0 punto d'accumulazione per Ω), corrisponderebbe almeno una radice a parte reale positiva, il che è contradittorio.

L'insieme Ω può esser totalmente privo di punti interni [4]. Ma, nella generalità dei casi, si può affermare che esso è dotato di

[4] V. un semplice es. alla fine del n. 3 del loc. cit.

punti interni. Vediamo quali proprietà si possono dedurre, in questo caso, per l'equazione proposta.

3. Sia U_0 un *punto interno ad* Ω. Non si può escludere che, in U_0, sia $c_0 = 0$ ma, poichè il polinomio $c_0(u_1\, u_2, \dots, u_p)$ non è certo identicamente nullo, U_0 è punto d'accumulazione di altri punti, anch'essi interni ad Ω e nei quali è $c_0 \neq 0$. Possiamo dunque supporre che, precisamente in U_0, sia $c_0 \neq 0$, anzi che sia $c_0 > 0$, questa limitazione potendosi sempre ottenere con l'eventuale cambiamento di segno dell'intero primo membro dell'equazione proposta. Siano

$$D_1 = c_1, \; D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \; D_h = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \dots\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ c_{2h-1} & c_{2h-2} & c_{2h-3} & \dots & \dots\dots\; c_h \end{vmatrix}$$

i determinanti di HURWITZ dell'equazione proposta (5). Se, in corrispondenza di U_0, la (1) non è essa stessa del tipo di HURWITZ, se ne constaterà lo spezzamento nel prodotto di due equazioni come (2) e (3) o (3'), quest'ultima contenendo tutte e sole le radici a parti reali nulle della (1). Se tali radici sono in numero di $h-k$, si avrà dunque in U_0 (come mostra il teor. richiamato al n. 1):

$$(5) \quad D_1 > 0, \; D_2 > 0, \dots, \; D_k > 0, \; D_{k+1} = 0, \; D_{k+2} = 0, \dots, \; D_h = 0,$$

con $0 \leq k \leq h$. Sia I un intorno circolare di U_0, tutto costituito di punti di Ω e nel quale c_0 e i polinomi $D_1, D_2, \dots, D_k$ si mantengano tutti positivi. Comunque si prenda U in I, dev'essere corrispondentemente

$$D_{k+1} \geq 0, \; D_{k+2} \geq 0, \dots, \; D_h \geq 0,$$

ed anzi, se in una di queste relazioni vale il segno inferiore, lo stesso segno deve valere in tutte quelle che lo seguono (mentre, se vale il segno superiore, lo stesso deve valere in tutte quelle che lo precedono). Di qui si deduce immediatamente che, se una delle varietà $D_{k+i} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, h-k$) invade l'intero spazio S_p (cioè se il polinomio D_{k+i} ha tutti i coefficienti identicamente nulli),

(5) Nei quali è inteso che $c_r = 0$, per $r = h+1, \; h+2, \dots$

anche le varietà $D_{k+i+1}=0$, $D_{k+i+2}=0, \dots$, $D_h=0$ invadono l'intero spazio S_p.

Senza compromettere la generalità del ragionamento, *possiamo supporre che tutte le varietà* $D_{k+i}=0$ $(i=1, 2, \dots, h-k)$ *invadano l'intero spazio* S_p. Infatti, nel caso contrario, basterebbe spostarsi da U_0 in altro punto U, convenientemente scelto in I, in corrispondenza del quale tutti quei polinomi D_{k+1}, D_{k+2}, $D_{k+3}, \dots$ i cui coefficienti non sono tutti identicamente nulli, risultassero positivi. Ciò, beninteso, nell'ipotesi che sia $k<h$.

Riassumendo, al variare del punto U in I (intorno circolare di U_0, interamente contenuto in Ω), *le relazioni* (5) *si possono supporre sempre soddisfatte.* Ciò significa (sempre in virtù del teor. richiamato al n. 1) che, delle h radici α_1 $\alpha_2, \dots, \alpha_h$ corrispondenti ad U (per la trasformazione Σ), certe $h-k$, e siano α_{k+1}, $\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_h$, permangono sull'asse immaginario (al variare di U in I), mentre le rimanenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ permangono nel semipiano $x<0$. Dunque *lo spezzamento della* (1) *nel prodotto delle due equazioni* (2) *e* (3) *o* (3'), *ha carattere d'identità in* I *e quindi anche in tutto* S_p; *inoltre le radici della* (3) *o* (3') *si mantengono a parti reali nulle, entro tutto* I *e quindi anche in tutto* S_p (6).

Ciò non esclude l'eventualità che in certi punti *fuori di* I, l'equazione (2) non possa ulteriormente spezzarsi in altre due equazioni componenti, allo stesso modo che, in I, s'era spezzata la (1). Ma tale eventualità non potrà sicuramente avere carattere d'identità, cioè essa potrà presentarsi soltanto in punti appartenenti a certe varietà $D_k=0$, $D_{k-1}=0$, $D_{k-2}=0, \dots$, mai in tutti i punti interni ad alcun dominio circolare di S_p.

4. Sempre supponendo che l'insieme Ω sia dotato di punti interni, facciamo ora una seconda ipotesi essenziale: *che sia* $c_0>0$ *in tutto* S_p. Che cosa si può dire dell'equazione (1) in un punto U_0 di $F\Omega$? Per rispondere a questa domanda, distinguiamo due casi:

1°) U_0 *appartiene ad* Ω. In questo caso non può accadere che le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ abbiano tutte, in corrispondenza ad U_0, parti reali negative. Infatti se, per ipotesi assurda, ciò accadesse, si potrebbe certo (sempre per la continuità della trasformazione Σ) rinchiudere U_0 in un intorno circolare I tale che, in corrispondenza d'ogni U di I, le $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ avrebbero ancora sempre parti reali negative, mentre le α_{k+1}, $\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_h$, semplici e a parti reali nulle in corrispondenza d' U_0, tali resterebbero per ogni U in I. Dunque alcune (almeno una) delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ devono avere,

(6) Tali radici saranno semplici in I, eventualmente multiple fuori di I.

per $U = U_0$, parti reali nulle e perciò dev'essere, in U_0, $D_k = 0$. In secondo luogo U_0 dev'essere punto d'accumulazione di punti non appartenenti ad Ω e precisamente di punti, in corrispondenza dei quali alcune delle radici della (1) hanno parte reale positiva. Tali punti sono evidentemente *esterni* ad Ω.

2°) Oppure U_0 *non appartiene ad* Ω. In questo caso (n. 2) la (1) deve possedere, in corrispondenza d' U_0, alcune radici multiple a parti reali nulle. Ma U_0 è punto d'accumulazione per Ω e perciò dev'essere $D_k \geq 0$. Se $D_k > 0$, le radici a parti reali nulle, per $U \equiv U_0$, sono le solite $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_h$ e soltanto queste. Le rimanenti radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ hanno parti reali negative. Comunque piccolo si prenda un intorno I di U_0, si potranno certamente trovare dei punti U in I, in corrispondenza dei quali le radici α_{k+1}, $\alpha_{k+2}, \dots, \alpha_h$ sono tutte semplici poichè, in caso contrario, la (3) o (3') dovrebbe possedère radici multiple in tutto S_p e non esisterebbero affatto punti di Ω. Si deduce da ciò che U_0 dev'essere punto d'accumulazione di punti *interni* ad Ω.

Possiamo raccogliere i risultati dell'analisi fatta, nel seguente enunciato: *se il coefficiente* c_0 *si mantiene positivo in tutto lo spazio* S_p *e se l'insieme* Ω *è dotato di punti interni, la parte di* $F\Omega$ *che appartiene ad* Ω, *è tutta contenuta nella varietà* $D_k = 0$ *d'indice più elevato* $k \leq h$ *che non invade l'intero spazio* S_p. *Ogni punto di tale parte è punto d'accumulazione di punti esterni ad* Ω. *Ogni eventuale punto di* $F\Omega$ *che sia estraneo ad* Ω *e che non appartenga a detta varietà, è punto d'accumulazione di punti interni ad* Ω.