Bollettino Unione Matematica Italiana

Aldo Rollero

Riferimenti intrinseci per lo studio locale delle trasformazioni puntuali fra due S_3

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 45–48.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_45_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Riferimenti intrinseci per lo studio locale delle trasformazioni puntuali fra due S_3.

Nota di ALDO ROLLERO (a Genova)

Sunto - *Si determinano nuovi riferimenti intrinseci per lo studio locale di una trasformazione puntuale fra due* S_3.

1. In una recente nota lincea (1) il prof. MARIO VILLA è giunto alla determinazione dei riferimenti proiettivi intrinseci (e delle relative equazioni canoniche) per lo studio locale di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r, per qualunque valore di r.

(1) V. MARIO VILLA « *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari, II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci* », Rendiconti Acc. Lincei Serie VIII, vol. IV, 1948.

Benchè l'argomento sia sostanzialmente esaurito dal lavoro del Prof. VILLA, in quanto segue espongo un altro procedimento per la determinazione di nuovi riferimenti intrinseci, valido nel caso di una trasformazione puntuale fra due S_3; anche qui, naturalmente, bisognerà ricorrere alla considerazione dell'intorno del terzo ordine della trasformazione.

2. Data fra due S_3 proiettivi, S ed $\bar{S}$, una corrispondenza puntuale regolare negli intorni di due punti corrispondenti O ed $\bar{O}$, si riferiscano i due spazi a due sistemi di coordinate proiettive non omogenee (x, y, z) per S ed $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ per $\bar{S}$ in cui $O, \bar{O}$ sono i punti di coordinate $(0, 0, 0)$; si assumano come rette $x = y = 0$, $x = z = 0$, $y = z = 0$, $x = y = z$ tre delle sette rette inflessionali uscenti da O (²); come rette $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$, $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ si prendano quelle che la proiettività (subordinata dalla trasformazione) fra le due stelle di centri O ed $\bar{O}$ fa corrispondere rispettivamente alle $x = y = 0$, $x = z = 0$, $y = z = 0$, $x = y = z$.

Si consideri la proiettività caratteristica fra gli assi $x, \bar{x}$ e si assuma come punto all'∞ dell'asse $\bar{x}$ il corrispondente in detta proiettività del punto all'∞ dell'asse x; analogamente si prenda come punto all'∞ dell'asse $\bar{y}(\bar{z})$ il corrispondente nella proiettività caratteristica fra gli assi $y, \bar{y}\,(z, \bar{z})$ del punto all'∞ dell'asse $y(z)$. Dopo di ciò la trasformazione, negli intorni di $O, \bar{O}$, si rappresenta mediante gli sviluppi:

$$\left\{\begin{aligned}
\bar{x} &= ax + a_1yz + a_2xz + a_3xy + \varphi_3(y,z) + x\varphi_2(y,z) + x^2\varphi_1(y,z) + x^3\varphi_0 + [4] \\
\bar{y} &= ay + b_1yz + b_2xz + b_3xy + \psi_3(x,z) + y\psi_2(x,z) + y^2\psi_1(x,z) + y^3\psi_0 + [4] \\
\bar{z} &= az + c_1yz + c_2xz + c_3xy + \chi_3(x,y) + z\chi_2(x,y) + z^2\chi_1(x,y) + z^3\chi_0 + [4]
\end{aligned}\right.$$

con $a \neq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3$, e dove inoltre le φ, ψ, χ sono forme rispettivamente in y, z; x, z; x, y il cui grado è dato dal rispettivo indice; precisamente:

$$\begin{aligned}
&\varphi_3 = a_{30}y^3 + a_{21}y^2z + a_{12}yz^2 + a_{03}z^3\,; \quad \varphi_2 = a_{20}\,y^2 + a_{11}yz + a_{02}z^2\,; \ldots \\
&\psi_3 = b_{30}x^3 + b_{21}x^2z + b_{12}xz^2 + b_{03}z^3\,; \quad \ldots \\
&\chi_3 = c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3\,; \quad \ldots
\end{aligned}$$

La proiettività caratteristica fra le rette $x = y = z$ e $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ è rappresentata da:

$$\bar{x} = \frac{a^2x}{a - (a_1 + a_2 + a_3)x}\,.$$

(²) Supporremo, per metterci nel caso generale, che le rette inflessionali uscenti da O siano fra loro distinte ed a 3 a 3 non giacenti in uno stesso piano.

Si osservi che, in generale, sarà $a_1 + a_2 + a_3 \neq 0$. (Se fosse $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ sarebbero omologhi, nella proiettività caratteristica fra $x = y = z$ e $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, i punti all'$\infty$ di queste due rette, ciò che non accadrà in generale). Al punto $P_4(1, 1, 1, 0)$ della $x = y = z$ corrisponde, nell'ultima proiettività caratteristica, il punto $P'_4(a^2, a^2, a^2, -a_1 - a_2 - a_3)$; al punto $Q'_4(1, 1, 1, 0)$ di $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ corrisponde, in detta proiettività, il punto $Q_4(a, a, a, a_1 + a_2 + a_3)$ di $x = y = z$. Si prenda il punto Q_4 come punto $(-1, -1, -1, 1)$ di S (ciò equivale a prendere come punto unità di S il coniugato armonico di Q_4 rispetto ad O ed a P_4) ed il punto P'_4 come punto unità di $\bar{S}$: risulterà $a = 1, a_1 + a_2 + a_3 = -1$.

Non è possibile con ulteriori specializzazioni dei sistemi di riferimento adottati per $S, \bar{S}$ (finora è arbitrario il piano all'∞ di uno dei due tetraedri) fissare altre condizioni per i coefficienti a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,3)$; per finire di determinare il riferimento intrinseco è necessario ricorrere agli intorni del terzo ordine di $O, \bar{O}$, ad es. nel modo che segue.

All'intorno del terzo ordine di $\bar{O}$ sul piano $\bar{x} = 0$ la trasformazione puntuale fa corrispondere in S la calotta $\sigma_3^{(x)}$ di centro O:

$$x = (1 + a_2 + a_3)yz - a_{30}y^3 - [a_{21} + a_3(1 + a_2 + a_3)]y^2z - \\ - [a_{12} + a_2(1 + a_2 + a_3)]yz^2 - a_{03}z^3 + [4].$$

Per mantenerci nel caso generale bisognerà supporre $\sigma_3^{(x)}$ non di flesso, cioè $1 + a_2 + a_3 \neq 0$. Le quadriche (di DARBOUX) aventi contatto del secondo ordine con $\sigma_3^{(x)}$ in O e che segano $\sigma_3^{(x)}$ secondo una curva avente per tangenti in O quelle di DARBOUX, hanno equazioni:

$$x = (1 + a_2 + a_3)yz - \left[a_3 + \frac{a_{21}}{1 + a_2 + a_3}\right]xy - \left[a_2 + \frac{a_{12}}{1 + a_2 + a_3}\right]xz + \lambda x^2$$

(λ arbitrario), mentre la retta p_1 polare di $y = z = 0$ rispetto ad una qualsiasi di esse ha per equazioni:

$$x = \left[a_3 + \frac{a_{21}}{1 + a_2 + a_3}\right]y + \left[a_2 + \frac{a_{12}}{1 + a_2 + a_3}\right]z + 1 = 0\,.$$

Analogamente siano $\sigma_3^{(y)}, \sigma_3^{(z)}$ le calotte di S che la traformazione puntuale fa corrispondere agli intorni del terzo ordine di $\bar{O}$ rispettivamente sui piani $\bar{y} = 0$ e $\bar{z} = 0$ (e per mantenerci nel caso generale bisognerà supporre $1 + b_1 + b_3 \neq 0$, $1 + c_1 + c_2 \neq 0$) e sia $p_2(p_3)$ la polare di $x = z = 0$ $(y = z = 0)$ rispetto ad una qualsiasi delle quadriche di DARBOUX relative a $\sigma_3^{(y)}(\sigma_3^{(z)})$.

Scegliendo come punto all'∞ dell'asse z la sua intersezione con p_1 e come punti all'∞ degli assi x, y le loro intersezioni rispettivamente con le rette p_2, p_3, risulterà:

$$a_{12} = - a_2(1 + a_2 + a_3),\ b_{21} = - b_3(1 + b_1 + b_3),\ c_{12} = - c_1(1 + c_1 + c_2).$$

Resta così definito un riferimento proiettivo invariante rispetto al quale le equazioni della trasformazione puntuale assumono la forma canonica:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x + a_3xy + a_2xz - (1 + a_2 + a_3)yz + a_{30}y^3 + a_{21}y^2z - \\ &\quad - a_2(1 + a_2 + a_3)yz^2 + a_{03}z^3 + x\varphi_2(y, z) + x^2\varphi_1(y, z) + x^3\varphi_0 + [4] \\ \bar{y} &= y + b_3xy - (1 + b_1 + b_3)xz + b_1yz + b_{30}x^3 - b_3(1 + b_1 + b_3)x^2z + \\ &\quad + b_{12}xz^2 + b_{03}z^3 + y\psi_2(x, z) + y^2\psi_1(x, z) + y^3\psi_0 + [4] \\ \bar{z} &= z - (1 + c_1 + c_2)xy + c_2xz + c_1yz + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y - \\ &\quad - c_1(1 + c_1 + c_2)xy^2 + c_{03}y^3 + z\chi_2(x, y) + z^2\chi_1(x, y) + z^3\chi_0 + [4] \end{aligned}\right.$$

ove ogni coefficiente è invariante.

Si potrebbe pure scegliere il piano all'∞ in S in modo simmetrico rispetto a p_1, p_2, p_3, prendendo ad es. come punto all'∞ dell'asse x il coniugato armonico di O rispetto alle intersezioni dell'asse x con p_2, p_3 e come punto all'∞ dell'asse $y(z)$ il coniugato armonico di O rispetto alle intersezioni dell'asse $y(z)$ con p_3, p_1 (p_1, p_2); si otterrebbe così un nuovo riferimento intrinseco.