# Bollettino Unione Matematica Italiana



Giuseppe Tanturri


## Inviluppi di piani che secano proiettivamente una $F^3$ di $S_3$


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **4** (1949), n.1, p. 48–52.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_48_0>

# Inviluppi di piani che secano proiettivamente una $F^3$ di $S_3$.

Nota di GIUSEPPE TANTURRI (a Torino).

**Sunto.** - *Con riferimento ad altra nota, si prendono in esame gli inviluppi dei piani che secano una superficie del terzo ordine dello spazio ordinario, non rigata, secondo cubiche proiettivamente identiche e si dimostra che tali inviluppi, di classe* 12, *sono riducibili nei soli casi di superficie con punto doppio uniplanare e con tre punti doppi biplanari.*

Riprendendo in esame una precedente mia nota comparsa su questo Bollettino (1) vedo che le stesse considerazioni colà svolte sono suscettibili di altra interpretazione: svolgo così nella presente lo stesso argomento esponendo i nuovi risultati.

(1) *Su alcuni inviluppi di rette*, « Bollettino U. M. I. », Aprile 1948, serie III, anno III, num. I (pag. 46-48).

Il prof. FANO ha dimostrato [2] che le sole superficie del terzo ordine di $S_3$ a sezioni piane tutte omografiche sono le rigate cubiche, ivi inclusi i coni (e le superficie riducibili): una $F^3$ non rigata è dunque secata da un piano variabile secondo cubiche a modulo variabile. Se si vuole che il modulo resti costante al variare del piano, questo dovrà variare con una certa legge, descrivendo un insieme $\infty^2$ o inviluppo di cui qui mi voglio occupare.

Se la $F^3$ è priva di punti doppi si vede facilmente che *l'inviluppo corrispondente a un valore generico del modulo è di classe* 12, mentre si abbassa a classe 6 e 4 rispettivamente quando si vuole che la cubica secata sia armonica o equianarmonica.

Infatti, posto che la $F^3$ passi per il punto fondamentale $A_0$, la sua equazione è

$$x_0^2\,\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3) + x_0\,\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3) + \varphi_3(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$$

ove le $\varphi$ sono forme di grado eguale all'indice. Eliminando $x_0$ fra questa e l'equazione di un piano generico: $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ si ha un'equazione di terzo grado nelle $x_1$, $x_2$, $x_3$ che rappresenta la proiezione, fatta dal punto fondamentale $A_0$ sul piano $x_0 = 0$, della cubica secata. E, visibilmente, i suoi coefficienti sono tutti di secondo grado nelle $u_i$. Scrivendo che l'invariante assoluto è costante si ha l'equazione

$$S^3 - kT^2 = 0 \qquad (a)$$

di grado 12 nei coefficienti dell'equazione della cubica, quindi di grado 24 nelle $u_i$. *Apparentemente* dunque l'inviluppo generico è di classe 24.

Ora si rifletta che fra i piani secanti compaiono quelli della stella di centro $A_0$ le cui sezioni, proiettate da $A_0$ su $x_0 = 0$, sono cubiche degeneri a modulo indeterminato: dunque l'inviluppo rappresentato da $u_0 = 0$ deve essere una componente fissa di $S$ e $T$, e anche, di conseguenza, del 1° membro della $(a)$; supposto di staccare questa componente fissa, che compare unicamente perchè alle cubiche oggettive si sono sostituite le loro proiezioni da un centro fisso, la parte residua variabile è di classe $m$ tale che $m < 24$. D'altra parte per $k = 1$ si devono trovare i piani contenenti cubiche con punto doppio, e siccome $F^3$ è generale l'insieme

[2] *Sulle superficie dello spazio* $S_3$ *a sezioni piane collineari*, « Rendiconti Lincei », vol. I, serie 6ª, I semestre, fascicolo 9°, pag. 469; e *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari*, « Memorie Lincei », 1926.

di tali piani è l'inviluppo di $F^3$ che è di classe 12: dunque $m$ è un multiplo di 12. Segue $m = 12$ c. v. d. Risulta subito che $m = 12$ per ogni altra $F^3$, purchè non rigata, a parte i casi di riducibilità.

Ciò si può confermare per via puramente geometrica con un ragionamento che trovasi in CREMONA (3). limitato però ai casi armonico ed equianarmonico. Invero tutto si riduce a dimostrare che, data una $F^3$ generale e una retta generica $a$, esistono 12 piani passanti per $a$ che secano la $F^3$ secondo cubiche aventi egual modulo (6 e 4 rispettivamente se il modulo è $\infty$ o 0). Sia allora $P$ un punto comune alla retta e alla superficie; il luogo delle rette per $P$ e tangenti a $F^3$ è un cono del 4° ordine di vertice $P$. Un piano, che non passa per $P$ e non è tangente al cono, taglia questo in una quartica $C^4$ e la retta $a$ in un punto $A$, e ci sono 12 rette per $A$ che secano $C^4$ in quaterne di punti aventi dato invariante assoluto $k$ (6 e 4 rispettivamente nei casi armonico ed equianarmonico; vedasi la mia nota citata e la relativa bibliografia). I piani di cui si trattava sono quelli che passano per $a$ e per ciascuna delle 12 rette (o 6, o 4), e il risultato così si conferma.

Entrando ora nell'ordine di idee della mia nota citata osservo che: per $F^3$ generale, l'inviluppo corrispondente a un valore generico di $k$ è certo irriducibile (se si riducesse per ogni valore di $k$, dovrebbe ridursi anche per $k = 1$); si riduce invece per $k = 0$, $k = \infty$, componendosi di parti multiple $S = 0$, $T = 0$. Se la superficie ha un punto doppio si riduce anche per $k = 1$, contenendo la $F^3$ inviluppo. di classe inferiore a 12. e una parte residua che è la stella con centro nel punto doppio contata con opportuna molteplicità. Così se i punti doppi fossero più d'uno.

*Può però la* (a) *ridursi per ogni valore di* k: dovrà allora, per il teorema del BERTINI, possedere una parte fissa o comporsi di gruppi in involuzione.

*Nel primo caso* questa componente fissa deve essere comune a $S = 0$, $T = 0$. I piani relativi conducono allora per sezione a cubiche con modulo indeterminato, cioè a cubiche cuspidate: questo caso si presenta solo nelle $F^3$ *con punto doppio uniplanare* $U$ ($U_6$, $U_7$, $U_8$). E viceversa. Dunque per tali $F^3$ dalla ($a$) si stacca per ogni valore di $k$ una componente, stella di piani con centro in $U$, con certa molteplicità, mentre la parte residua ha classe uguale a quella di $F^3$, cioè 6, o 5, o 4.

(3) *Mèmoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Opere III, Hoepli 1917, (pag. 60).

*Nel secondo caso*, ed escluso il precedente, la schiera si compone di gruppi in involuzione, e $S$ e $T$ non hanno alcuna componente comune. Naturalmente gli inviluppi componenti devono avere classe $\nu$ eguale a un divisore di 12; e maggiore di 2 perchè nella schiera si deve trovare come componente, per $k=1$, l'inviluppo di $F^3$ (associato ad altri) di classe certo maggiore di 2. Restano a priori possibili i casi $\nu = 6, 4, 3$.

Ora con tali valori di $\nu$ la $F^3$ ha certo dei punti multipli, dunque tra gli inviluppi ($a$) devono comparire le stelle dei piani che hanno quei punti come centri.

Ammesso ora che ogni inviluppo della schiera sia riducibile in due inviluppi di 6ª classe, ciascuno dei due sarà combinazione lineare di una forma riducibile nelle $u_i$ che rappresenta quelle stelle eventualmente associate ad altro, e di una forma di 6° grado. Ma anche $S=0$ e $T=0$, rispettivamente di quarto e di sesto grado nelle $u_i$, fanno parte della schiera e devono comporsi con quelle forme; deve allora porsi $S = U_1 V_3$, $T = U_1^3 V_3 + \lambda W_6$ ove $U$, $V$, $W$ sono forme nelle $u_i$ di grado eguale al rispettivo indice. Si trova di conseguenza

$$S^3 - kT^2 = U_1^3 V_3^3 - k(U_1^3 V_3 + \lambda W_6)^2 = 0$$

e siccome per $k=1$ si deve trovare, fra l'altro, l'inviluppo $U_1 = 0$, segue $\lambda = 0$ e $S$ e $T$ hanno una componente comune, caso supposto escluso. In pari modo si trattano altri casi a priori possibili.

Analogamente per $\nu = 4$ lo stesso ragionamento darebbe $S = U_2^2 + \lambda V_4$, $T = U_2(U_2^2 + \mu V_4)$ ove $V_4$ è una forma riducibile nelle $u_i$, dunque

$$S^3 - kT^2 = (U_2^2 + \lambda V_4)^3 - kU_2^2(U_2^2 + \mu V_4)^2 = 0$$

e, dovendosi trovare per $k=1$ l'inviluppo degenere $V_4 = 0$ come soluzione doppia, sarebbe $\lambda = 0$ con lo stesse conclusioni di prima.

Rimane da esaminare il caso $\nu = 3$ *che dà luogo a una soluzione*. Infatti in questo caso è possibile a priori porre $S = U_1(U_1^3 + \alpha V_3)$, $T = (U_1^3 + \beta V_3)(U_1^3 + \gamma V_3)$ e, se $V_3$ è riducibile, per $k=1$ si trovano fra l'altro le componenti di $V_3$. D'altra parte l'unica $F^3$ non rigata di terza classe è quella *con tre punti doppi biplanari*: resta dunque da confermare col calcolo che qui si ha una effettiva soluzione.

Scrittane infatti l'equazione sotto la forma

$$x_0 x_1 x_2 = x_3^3$$

la determinazione delle sue intersezioni con il piano $\sum_0^3 u_i x_i = 0$ conduce all'equazione

$$u_1 x_1^2 x_2 + u_2 x_1 x_2^2 + u_3 x_1 x_2 x_3 + u_0 x_3^3 = 0$$

che rappresenta la proiezione, dal punto fondamentale $A_0$ sul piano $x_0 = 0$, della cubica secata. Gli inviluppi dei piani che secano $F^3$ secondo cubiche equianarmoniche e armoniche si ottengono rispettivamente annullando gli invarianti $S$ e $T$. L'inviluppo $S = c^2 u_3 (u_3^3 + 24 u_0 u_1 u_2) = 0$ ($c$ costante numerica) comprende, oltre a un inviluppo proiettivamente equivalente alla $F^3$, *la stella che ha il céntro nel punto di concorso dei tre piani che osculano la* $F^3$ *lungo le tre congiungenti i punti doppi a due a due*(4). L'inviluppo $T = -c^3[u_3^3 + 6(3 + \sqrt{3}) u_0 u_1 u_2][u_3^3 + 6(3 - \sqrt{3}) u_0 u_1 u_2] = 0$ si spezza anche lui in due $F^3$ equivalenti alla data. Di conseguenza anche la ($a$) si riduce in quaterne di inviluppi del tipo

$$u_3^3 - k_i u_0 u_1 u_2 = 0$$

tutti proiettivi fra loro e alla $F^3$, avendo in comune con questa le stesse singolarità. In particolare per $k = 1$ si trova identicamente

$$S^3 - T^2 = 1728 u_0^3 u_1^3 u_2^3 (u_3^3 + 27 u_0 u_1 u_2)$$

espressione che, eguagliata a zero, dà la $F^3$ fondamentale inviluppo, insieme con le tre stelle che hanno i centri nei tre punti doppi.

Si può anche esprimere il risultato di questi calcoli come segue: *ogni inviluppo della schiera*

$$u_3^3 + \lambda u_0 u_1 u_2 = 0$$

*si compone di piani che secano proiettivamente la superficie luogo* ($F^3$ *con tre punti doppi biplanari*) *aderente a un qualunque inviluppo della schiera stessa.* E dualmente.

Concludendo, resta confermato che i soli casi di riducibilità, per $k$ generico, degli inviluppi della schiera $S^3 - kT^2 = 0$ si hanno per $F^3$ con punto uniplanare o con tre punti doppi biplanari.

(4) Questa proprietà non mi risulta segnalata finora: tutti i piani della stella secano la $F^3$ secondo cubiche equianarmoniche.