Roberto Conti

Su una nuova classe di funzioni “a variazione limitata” di due variabili e le sue relazioni con le classi H, A, P

Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 53–57.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_53_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Su una nuova classe di funzioni « a variazione limitata » di due variabili e le sue relazioni con le classi H, A, P.

Nota di ROBERTO CONTI (a Firenze) [1]

Sunto. - *Si definisce una nuova classe di funzioni a variazione limitata di due variabili per la quale valgono tutte le proprietà valide per le funzioni di* ARZELÀ *e si precisano note relazioni tra le funzioni di* HARDY, *di* ARZELÀ *e di* PIERPONT.

Seguendo i simboli e le notazioni introdotte da C. R. ADAMS e J. A. CLARKSON [2] indichiamo con R il rettangolo $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ del piano x,y e con A,H,P le classi di funzioni « a variazione limitata» in R, rispettivamente secondo ARZELÀ, HARDY-KRAUSE e PIERPONT-HAHN. Per brevità indichiamo poi con $J_{x,y}$ le funzioni a variazione limitata (in senso ordinario, cioè secondo JORDAN) rispetto a ciascuna variabile separatamente, e con J_s le funzioni che risultano a variazione limitata su ogni segmento rettilineo appartenente ad R.

Nel n. 1 dopo aver richiamato la def. di funzione A, si prende in esame la nuova classe delle *funzioni* $\bar{A}$, le quali sono strettamente legate alle A medesime (Teor. I), e, come quelle, definibili anche a partire dalle funzioni monotone (Teor. II).

La nuova def. non manca di un certo interesse intrinseco in quanto permette l'estensione alla classe $A + \bar{A}$ di tutte quelle proprietà delle A che non dipendano dall'orientazione degli assi coordinati (Teor. III). D'altronde la considerazione delle $\bar{A}$ non sembra inutile anche perchè permette di precisare relazioni già note, e cioè le

$$H < A < P, J_{xy}$$

sostituendovi (n. 2) le

$$H < A\bar{A} < A + \bar{A} < P, J_{xy}$$

e le

$$H < A\bar{A} < J_s .$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze

[2] Ved.: « Trans. Am. Math. Society », 35 (1933), pp. 824-854); ivi, 36 (1934), pp. 711-730. Per le referenze sull'argomento rinviamo a questi due lavori. La relazione $A < B$ indica che A è una sottoclasse propria di B.

1. Sia $f(x, y)$ una funzione definita nel rettangolo

$$R(a \leq x \leq b\,;\; c \leq y \leq d)$$

del piano x, y. Con A_m indichiamo un insieme di $m+1$ punti (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\ldots, m)$, di R soddisfacenti le condizioni

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m = b\,; \qquad c = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_m = d.$$

Se ad ogni A_m facciamo corrispondere la somma

$$(1) \qquad \sum_{0}^{m-1}{}_i \,|\, f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) \,|\,,$$

otterremo un insieme numerico il cui limite superiore (finito o no) rappresentiamo con v_A. Se v_A risulta finito si dice che la f è in R una funzione a variazione limitata secondo ARZELÀ, o brevemente una *funzione A* ( ).

Se invece della (1) associamo ad ogni A_m la somma

$$(2) \qquad \sum_{0}^{m-1}{}_i \,|\, f(x_{i+1}, y_{m-i-1}) - f(x_i, y_{m-i}) \,|$$

otteniamo un secondo insieme numerico, di cui indichiamo con $\bar{v}_A$ il limite superiore. Diremo allora che $f(x,y)$ è in R una *funzione* $\bar{A}$ se $\bar{v}_A$ risulta finito.

Dal confronto delle due definizioni risulta anzitutto

TEOR. I. - *Se* $f(x, y)$ *è in* $R(a \leq x \leq b\,; c \leq y \leq d)$ *una funzione* $A\,[\bar{A}]$, *allora* $\varphi(x, y) = f(-x, y)$ *e* $\psi(x, y) = f(x, -y)$ *sono entrambe funzioni* $\bar{A}\,[A]$, *risp. in* $R_1(-b \leq x \leq -a\,; c \leq y \leq d)$ *ed in* $R_2(a \leq x \leq b\,; -d \leq y \leq -c)$.

Poichè, come ha mostrato ARZELÀ, ogni funzione A è la differenza di due funzioni monotone entrambe non decrescenti (o entrambe non crescenti) sia rispetto alla variabile x sia rispetto alla y e inversamente, segue dal TEOR. I (ma potrebbe anche mostrarsi direttamente) che

TEOR. II. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $f(x,y)$ *sia in* R *una funzione* $\bar{A}$ *è che essa si possa rappresentare come differenza di due funzioni monotone entrambe non decrescenti rispetto alla* x *e contemporaneamente non crescenti rispetto alla* y *(ovvero entrambe non crescenti rispetto alla* x *e non decrescenti rispetto alla* y*).*

Sempre in virtù del Teor. I abbiamo che

(3) Ved.: loc. cit. per primo in (2), p. 825;

TEOR. III. – *Tutte le proprietà delle funzioni* A *che non dipendano dall'orientazione degli assi coordinati sussistono per le* $\overline{\mathrm{A}}$.

Tralasciando l'enumerazione di tali proprietà, per le quali rinviamo ai due lavori citati in (²), ci limitiamo a rilevare che, ad es., da un noto risultato di J. C. BURKILL e U. S. HASLAM-JONES (⁴) segue che

TEOR. IV. – *Ogni funzione della classe* $\mathrm{A} + \overline{\mathrm{A}}$ *è in* R *quasi dappertutto differenziabile* (*nel senso di* STOLZ).

Da un teor. di HAHN (⁵) segue inoltre la relazione

$$A + \overline{A} \leq P$$

e da semplici esempi la

$$A + \overline{A} < P. \tag{3}$$

Evidente è poi la

$$A + \overline{A} < J_{xy} \tag{4}$$

Altre relazioni immediate sono la

$$A\overline{A} < J_s \tag{5}$$

e le

$$A\overline{A} < A\,, \quad A\overline{A} < \overline{A} \tag{6}$$

di cui l'ultima può dedursi dalla precedente mediante il Teor. I. Tutte queste relazioni sussistono anche se ci si restringe a considerare le sole funzioni continue.

2. Consideriamo un insieme di punti $(x_r, y_s)(r = 0,1,2,\dots, m; s = 0,1,2,\dots, n)$ di R tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b; \quad c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d\,.$$

Associando ad ogni tale insieme la somma

$$\sum_{r,s\;0,0}^{m-1,\,n-1} |\,\Delta f(r,r+1\,;s,s+1)\,| \equiv \sum_{r,s\;0,0}^{m-1,\,n-1} |\,f(x_r, y_s) + f(x_{r+1}, y_{s+1}) - f(x_{r+1}, y_s) - f(x_r, y_{s+1})\,|$$

si ha un insieme numerico di cui indichiamo con w il limite superiore. Come è noto, se w risulta finito la f si dice a variazione limitata secondo VITALI, od anche a variazione doppia finita, o, semplicemente, *funzione* V. Se inoltre esiste un $\bar{y}$ ed un $\bar{x}$ tali che

(⁴) Ved.: « Journal of the London Math. Society », VII (1932), pp. 297–305.

(⁵) Ved.: HAHN, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin, 1921, p. 546.

$f(x, \bar{y})$ ed $f(\bar{x}, y)$ risultino come funzioni di x e, risp., di y, a variazione limitata, allora la f si dice a variazione limitata secondo HARDY, o semplicemente *funzione* H.

Vale (6) la relazione

$$H < J_{xy} \tag{7}$$

e, più precisamente (v. la (4)) vale (7) la

$$H \leq A \,. \tag{8}$$

Dimostriamolo nel seguente modo. Preso un qualunque insieme A_m la differenza $f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)$ può scriversi

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) &= \Delta f(i, i+1; i, i+1) + \\ &+ |f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)| + |f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i)| \,. \end{aligned}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} f(x_i, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) &= \Delta f(i-1, i; i, i+1) + f(x_{i-1}, y_{i+1}) - f(x_{i-1}, y_i) = \dots \\ \dots &= \Delta f(i-1, i; i, i+1) + \Delta f(i-2, i-1; i, i+1) + \dots \\ \dots &+ \Delta f(0, 1; i, i+1) + f(a, y_{i+1}) - f(a, y_i) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_i) &= \Delta f(i, i+1; i-1, i) + \Delta f(i, i+1; i-2 . i-1) + \dots \\ \dots &+ \Delta f(i, i+1; 0, 1) + f(x_{i+1}, c) - f(x_i, c) \end{aligned}$$

e riunendo le tre ultime uguaglianze scritte

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i) &= \Delta f(i, i+1; i, i+1) + \\ &+ |\Delta f(i-1, i; i, i+1) + \Delta f(i, i+1; i-1, i)| + \dots \\ \dots &+ |\Delta f(0, 1; i, i+1) + \Delta f(i, i+1; 0, 1)| + \\ &+ |f(x_{i+1}, c) - f(x_i, c)| + |f(a, y_{i+1}) - f(a, y_i)| \,. \end{aligned}$$

Prendendo i valori assoluti e sommando rispetto ad i da 0 ad $m-1$ avremo

$$\begin{aligned} \sum_0^{m-1}{}_i |f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)| &\leq \sum_{0,0}^{m-1, m-1}{}_{i,i} |\Delta f(i, i+1; i, i+1)| + \\ &+ \sum_0^{m-1}{}_i |f(x_{i+1}, c) - f(x_i, c)| + \sum_0^{m-1}{}_i |f(a, y_{i+1}) - f(a, y_i)| \,. \end{aligned}$$

(6) Ved.: W. H. YOUNG, « Quarterly J. », 37, (1906), p. 57 e segg.

(7) Ved. ad. es.: HOBSON, *Theory of functions of a real variable*, 3d ed., vol I, Cambridge, 1927, pp 345-346.

Perciò se $V_x(b,c)$ rappresenta la variazione, finita per la (7), di $f(x, c)$ nell'intervallo $a \leq x \leq b$ e $V_y(a, d)$ la variazione di $f(a, y)$ nell'intervallo $c \leq y \leq d$, finita anch'essa, avremo la

$$v_A \leq w + V_x(b, c) + V_y(a . d) \tag{9}$$

da cui resta provata la (8).

Il procedimento seguito presenta rispetto alla dimostrazione usuale, oltre il vantaggio di essere diretto e di fornire una disuguaglianza come la (9), anche quello di potersi applicare, con semplice sostituzione di simboli, a dimostrare la

$$H \leq \overline{A} \tag{8^{bis}}$$

ed a fornire la relazione

$$\overline{v}_A \leq w + V_x(b, d) + V_y(b, d) \tag{9^{bis}}$$

analoga alla (9).

Riunendo le (8) e (8^{bis}) possiamo scrivere, la

$$H \leq A\overline{A}$$

ed infine, dall'esempio seguente, la

$$H < A\overline{A} . \tag{10}$$

Si definisca $f(x, y)$ nel quadrato $Q(0 \leq x \leq 1\,;\; 0 \leq y \leq 1)$ ponendo $f\left(\frac{1}{2^n}, \frac{d}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ dove $n = 1,2, \ldots$ e d è un qualunque numero dispari $< 2^n$, e ponendo $f(x, y) = 0$ altrove. Per una tale f è evidentemente $w = +\infty$, mentre $v_A = \overline{v}_A = 2$.

Sono poi evidenti le modifiche che si possono apportare alla f in modo da renderla continua, cosicchè la (10) sussiste anche per le funzioni continue.