Bruno Tedeschi

Sulla ricerca del tasso col metodo del Sonnet

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 57–61.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sulla ricerca del tasso col metodo del Sonnet.

Nota di Bruno Tedeschi (a Roma).

Sunto. - *L'A. da una facile dimostrazione diretta del metodo, determina un confine superiore dell' errore che si commette fermandosi all'* s*-esimo tentativo e fa vedere che esso è sufficientemente piccolo perchè il metodo risulti praticamente applicabile nella finanziaria.*

1. Nella matematica finanziaria una delle formole di capitalizzazione è data dalla

$$M = C \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + pi) \tag{1}$$

dove $C > 0$ rappresenta il capitale originario, $0 < i \leq 1$ il tasso di interesse, $n + p$ la durata dell'impiego, essendo $n > 0$ intero e $0 \leq p < 1$. M è allora il montante ed è

$$C < M \leq C \cdot 2^n \cdot (1 + p).$$

Se nella (1) poniamo $M/C = m$, si ha l'eguaglianza

$$(1 + i)^n \cdot (1 + pi) = m \tag{2}$$

con $1 < m \leq 2^n \cdot (1 + p)$.

La (2), considerata come equazione in i, serve a trovare il tasso, note che siano le altre grandezze. Essa è algebrica di grado $n + 1$ e, siccome il membro di sinistra prende il valore 1 per $i = 0$ e cresce quindi tendendo all'infinito, per continuità la (2) ha una ed una sola radice reale $i > 0$ [1]. Se poi si prende $m \leq 2^{n+p}$ ed è $p > 0$, si ha tanto più $m < 2^n(1+p)$, e quindi $i < 1$.

Per trovare un valore approssimato quanto si vuole della radice positiva della (2), se $p \neq 0$ e se $n \geq 2$, esiste il cosidetto metodo del SONNET [2], che è una applicazione del metodo di iterazione; ma del metodo del SONNET non ho trovata dimostrazione alcuna nei libri citati nè in quelli di altri autori (CZUBER, BARRIOL, DELL'AGNOLA, SANTACROCE, ORTU CARBONI, ACHARD, GOURY ecc.); perciò di esso espongo una dimostrazione diretta che mi sembra interessante, almeno dal punto di vista didattico, e che dà contemporaneamente un confine superiore per ciascuno degli errori commessi nelle successive approssimazioni.

2. Secondo il SONNET, per risolvere la (2) si osserva che, essendo $0 < i < 1$ è

$$(1 + i)^{n+p} < (1 + i)^n \cdot (1 + pi) = m$$

e quindi, risolvendo l'equazione

$$(1 + i_1)^{n+p} = m\,, \tag{3}$$

si ricava uno ed un solo valore positivo $i_1 > i$ ed essendo $m \leq 2^{n+p}$

(1) Conclusione alla quale potevasi anche arrivare applicando la regola di CARTESIO.

(2) Vedi: G. MINUTILLI, *Basi tecniche dell'assicurazione vita* « Società Anonima poligrafica italiana », Roma 1930-VIII.

E. LENZI, *Lezioni di Matematica finanziaria*. Guf, Napoli 1933-XII.

E. DEL VECCHIO, *Lezioni di Matematica finanziaria*. CEDAM, Padova 1937-XV.

F. SIBIRANI, *Lezioni di matematica generala e finanziaria*, vol. II. CEDAM, Padova 1944-XXII.

è ancora $i_1 \leq 1$. È allora

$$(1+i)^n \cdot (1+pi_1) > (1+i)^n \cdot (1+pi) = m$$

e dall'equazione

(3 *bis*) $$(1+i_2)^n = m/(1+pi_1)$$

si ricava uno ed un solo valore $-1 < i_2 < i$. Ne segue

$$(1+i)^n \cdot (1+pi_2) < (1+i)^n \cdot (1+pi) = m$$

e risolvendo l'equazione

(3 *ter*) $$(1+i_3)^n = m \,/\, (1+pi_2)$$

si ricava uno ed un solo valore $i_3 > i$. E così avanti ottenendo in generale

(4) $$i_{2k} < i < i_{2k-1} \qquad k = 1,2,3,4, \ldots .$$

3. Dimostriamo che le i_{2k} e le i_{2k-1} formano una coppia di successioni convergenti che definiscono la radice reale i.

Dalla (2) e dalla (3) si trae

$$\left(\frac{1+i_1}{1+i}\right)^n = \frac{1+pi}{(1+i_1)^p}$$

e quindi

$$\left(1+\frac{i_1-i}{1+i}\right)^n = 1+\frac{(1+pi)-(1+i_1)^p}{(1+i_1)^p}$$

e, per il teorema binomiale,

$$1+n\,\frac{i_1-i}{1+i}+B = 1+\frac{p\,(i-i_1)+\dfrac{p\,(1-p)}{2}\,i_1^2}{(1+i_1)^p}-D$$

con $B > 0\,, D > 0$.

Da qui si ricava

$$i_1 - i < \frac{1+i}{n} \cdot \frac{p\,(i-i_1)+\dfrac{p(1-p)}{2}\,i_1^2}{(1+i_1)^p}$$

ed a maggior ragione, sopprimendo il termine $p(i-i_1) < 0$, ponendo $p = 0$ nel denominatore, $p = \frac{1}{2}$ nel numeratore ed $1+i_1 > 1+i$ in luogo di $1+i$ si ha

(5) $$i_1 - i < \frac{i_1^2}{8n}\,(1+i_1)\,.$$

La (3*bis*) generalizzata prende la forma

$$(1+i_{2k})^n \cdot (1+p \cdot i_{2k-1}) = m\,.$$

Allora, dal confronto di quest'ultima eguaglianza con la (2), si ricava

$$\left(1+\frac{i-i_{2k}}{1+i_{2k}}\right)^n = 1+\frac{p(i_{2k-1}-i)}{1+pi}$$

e, sviluppando la potenza e abbandonando termini positivi, si ricava

$$n\,\frac{i-i_{2k}}{1+i_{2k}} < p\,\frac{i_{2k-1}-i}{1+pi}$$

da cui

$$i-i_{2k} < \frac{p}{n}\cdot\frac{1+i_{2k}}{1+pi}(i_{2k-1}-i)$$

e a maggior ragione, ponendo $p=0$ nel denominatore, $p=1$ nel numeratore ed $1+i_1$ in luogo di $1+i_{2k}$, essendo, per la (4), $1+i_1>1+i_{2k}$, si ha

(6) $$i-i_{2k} < \frac{1+i_1}{n}(i_{2k-1}-i)$$

dove è $(1+i_1)/n<1$ essendo $n\geq 2$.

Analogamente

(6′) $$i_{2k+1}-i < \frac{1+i_1}{n}(1-i_{2k}).$$

Dalla (5), (6) e (6′) si ricava

(7) $$\begin{aligned} i_{2k+1}-i &< \frac{i_1^2}{8}\left(\frac{1+i_1}{n}\right)^{2k+1} \\ i-i_{2k} &< \frac{i_1^2}{8}\left(\frac{1+i_1}{n}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

Ma è identicamente

$$i_{2k-1}-i_{2k} = (i_{2k-1}-i)+(i-i_{2k})$$

e perció dalle (7) si ricava

$$i_{2k-1}-i_{2k} < \frac{i_1^2}{8}\left(\frac{1+i_1}{n}\right)^{2k-1}\cdot\left(1+\frac{1+i_1}{n}\right)$$

ed a maggior ragione, sostituendo 1 a $(1+i_1)/n$, si ha

(8) $$i_{2k-1}-i_{2k} < \frac{i_1^2}{4}\left(\frac{1+i_1}{n}\right)^{2k-1}$$

Dalla (8) si vede che, per k tendente all' infinito, le differenze $i_{2k-1}-i_{2k}$ tendono a zero, e perciò le (4), (7), (8), dimostrano quanto si voleva.

4. Se nelle (7) poniamo $2k+1=s$ e rispettivamente $2k=s$ si valuta anche un confine superiore dell'errore che si commette fermandosi all's-esimo tentativo; esso vale, in valor assoluto,

$$\frac{i_1^2}{8}\cdot\left(\frac{1+i_1}{n}\right)^s.$$

Però tale confine superiore è molto ampio a seguito delle sostituzioni fatte nelle disuguaglianze. L'errore effettivo commesso applicando il metodo del SONNET è certamente molto più piccolo.

5. È appena da segnalare che:
la (2), quale equazione in i, rientra nell'equazione $x=\varphi(x)$ alla quale, sotto ampie ipotesi, è applicabile il metodo di iterazione [1]; la (2) è risolvibile col metodo delle funzioni trigonometriche del CANTELLI [2]; la (2) è risolvibile con altri metodi dovuti al PICONE [3] e al TORTORICI [4].

Ma la dimostrazione da me esposta ha il vantaggio di usare solamente concetti elementari, di essere diretta e di dare una limitazione dell'errore.