BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BENEDETTO PETTINEO

Sulle serie numeriche $\sum u_n f(n)$, dove la successione u_n è monotona e la funzione $f(x)$ è periodica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 61–63.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sulle serie numeriche $\Sigma u_n f(n)$, dove la successione u_n è monotona e la funzione $f(x)$ è periodica.

Nota di BENEDETTO PETTINEO (a Agrigento).

Sunto. - *Riprendendo e generalizzando i risultati ottenuti in un altro lavoro, l'A. esamina il comportamento della serie* $\Sigma u_n f(n)$ *in relazione alla serie divergente* Σu_n, *a termini positivi, nell'ipotesi che la funzione* $f(x)$ *sia periodica.*

Questa Nota è una breve sintesi di un nostro lavoro, [1], nel quale risolviamo il seguente problema:

Sia data una serie Σu_n *divergente, a termini positivi mai cre-*

(1) Cfr. p. es. CASSINIS, *Calcoli Numerici*, Pisa. Pacini 1928.

(2) F. P. CANTELLI, *Sulla ricerca del saggio di interesse delle annualità*, « Atti della Cassa Depositi e Prestiti » Roma 1906.

G. SANTACROCE, *Matematica finanziaria*, Perella. Roma 1929.

(3) M. PICONE, *Lezioni di Calcolo numerico* « D.U.S.A. » Roma 1940-41.

(4) P. TORTORICI, *Sopra un nuovo metodo per la determinazione del tasso di investimento in un prestito.* « Consiglio Nazionale delle ricerche », 1944, n. 159, « Rendiconti Accademia dei Lincei », serie VIII, vol. I, fasc. 5.

(1) B. PETTINEO, *Sulle serie numeriche...*, « Ann. di Mat. pura ed Appl. », (4), 26 (1947), pp. 119-140.

scenti. Sia data una funzione f(x) *definita nell'insieme dei numeri non negativi ed ivi periodica di periodo* ϑ*; inoltre* f(x) *sia limitata ed integrabile secondo* RIEMANN *nell'intervallo* (o, ϑ). *Si domanda:*

a) *la serie* $\Sigma u_n f(n)$ *è divergente?*

b) *e se tale serie è divergente, come diverge rispetto alla serie* Σu_n *assegnata?*.

Nel lavoro ricordato abbiamo supposto che la funzione $f(x)$ non sia mai negativa ed abbiamo distinto due casi secondo che ϑ è razionale o no.

Se il periodo ϑ è un numero razionale h/k, con h e k interi primi fra loro, la successione

$$f(1),\ f(2), \ldots,\ f(n), \ldots$$

assume con periodicità i valori

$$f(1),\ f(2), \ldots,\ f(h) \tag{1}$$

e se con μ denotiamo il valor medio

$$\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(h)}{h},$$

si dimostra che:

1. *Qualora il valor medio* μ *dei valori* (1) *non sia nullo, la serie* $\Sigma u_n f(n)$ *è divergente ed essa diverge con la stessa rapidità della serie* $\Sigma \mu u_n$.

Nel caso più interessante in cui il periodo ϑ è un numero irrazionale, si dimostra che:

2. *Se* μ *è il valor medio della funzione* f(x) *nell'intervallo* (o, ϑ), *cioè:*

$$\mu = \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} f(x)dx, \tag{2}$$

e μ *non è nullo. la serie* $\Sigma u_n f(n)$ *è divergente e diverge con la stessa rapidità della serie* $\Sigma \mu u_n$.

Facciamo vedere che queste proposizioni hanno pure luogo quando non si fa l'ipotesi che la funzione $f(x)$ debba non assumere valori negativi.

Sia dunque $f(x)$ una qualunque funzione periodica di periodo ϑ, per esempio irrazionale, e sia limitata ed integrabile nell'intervallo (o, ϑ); inoltre il valor medio μ, dato dalla (2), non sia nullo.

Definiamo le due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$, ponendo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \\ 0 & \text{se} \quad f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Le funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ risultano pure periodiche, di periodo ϑ, limitate e integrabili, inoltre, posto

$$\mu_1 = \frac{1}{\vartheta}\int_0^\vartheta f_1(x)dx, \qquad \mu_2 = \frac{1}{\vartheta}\int_0^\vartheta f_2(x)dx,$$

risulta

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 .$$

Peraltro, qualunque sia l'indice n,

$$\sum_{i=1}^n u_i f(i) = \sum_{i=1}^n u_i f_1(i) + \sum_{i=1}^n u_i f_2(i)$$

ed allora, poichè in virtù del teorema 2, le due serie

$$\Sigma u_n f_1(n) \qquad \text{e} \qquad \Sigma u_n f_2(n)$$

divergono rispettivamente con la stessa rapidità di

$$\Sigma \mu_1 u_n \qquad \text{e} \qquad \Sigma \mu_2 u_n ,$$

la serie

$$\Sigma u_n f(n)$$

divergerà con la stessa rapidità di $\Sigma(\mu_1 + \mu_2)u_n$, cioè della serie

$$\Sigma \mu u_n .$$

In modo analogo si generalizza il teorema 1.