Bollettino
Unione Matematica Italiana

Angelo Pescarini

Su alcuni sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 63–67.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Su alcuni sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali.

Nota di ANGELO PESCARINI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si considerano sistemi di equazioni lineari, omogenei, alle derivate parziali del 1° ordine con coefficienti costanti e si stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le loro soluzioni riescano armoniche.*

Il prof. GIANFRANCO CIMMINO in un suo lavoro [1] si è proposto di studiare una classe di sistemi di equazioni alle derivate parziali lineari, omogenee ed a coefficienti costanti, caratterizzata da due particolarità:

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(1) *Su alcuni sistemi lineari omogenei di equazioni alle derivate parziali del primo ordine.* « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova », 1941.

1) Il numero delle funzioni incognite è uguale a quello delle variabili indipendenti.

2) Le funzioni incognite debbono riuscire necessariamente armoniche per soddisfare il sistema stesso.

Questa caratterizzazione è stata evidentemente suggerita dalle condizioni di monogenia e tale analogia è stata poi sfruttata nella ricerca.

GR. MOISIL, sia pure con intendimenti diversi, aveva già rilevato in una sua memoria ([2]) alcune proprietà comuni a certi sistemi che si presentano nella fisica-matematica onde pervenire con metodo uniforme alla loro integrazione.

Più precisamente egli considera sistemi di equazioni alle derivate parziali, lineari, del 1° ordine, a coefficienti costanti, del tipo:

$$E_1 = F_1 ; \dots ; E_n = F_n$$

in cui, $F_1 \dots F_n$ sono date funzioni ed $E_1 \dots E_n$ espressioni differenziali che godono fra l'altro della seguente proprietà:

Il sistema omogeneo:

$$E_1 = 0 ; \dots ; E_n = 0$$

ha per integrale certe funzioni $f_1 \dots f_q$ soddisfacenti l'equazione $\Delta_2 f = 0$, ove Δ_2 è il laplaciano di tipo ellittico o iperbolico.

Fra le questioni che emergono da questo ordine di studi, si pone fra l'altro quella di dare una condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema del tipo suddetto, di n equazioni, omogeneo, fra n funzioni incognite, in m variabili, abbia conseguentemente le soluzioni armoniche.

Nella presente nota ci proponiamo appunto di rispondere a tale quesito.

Sia l'operatore Δ_{ij} a due indici del tipo:

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kij} \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (i, j = 1, 2, \dots n)$$

dove le α_{kij} sono costanti. Tale operatore ha come polinomio caratteristico:

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kij} \xi_k$$

col che conveniamo di indicare con la stessa lettera Δ_{ij} tanto l'operatore quanto il suo polinomio caratteristico.

([2]) *Sur une classe de systèmes d'equations aux dérivées partielles de la physique mathematique* ». Bucarest, 1931.

Consideriamo il sistema

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} X^{(j)} = 0 \qquad (i = 1,\ 2, \dots n) \tag{1}$$

nelle n funzioni $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)} \dots$, $X^{(n)}$ supposte derivabili parzialmente fino al secondo ordine. Facciamo l'ipotesi che le equazioni che lo compongono siano indipendenti il che equivale ad ammettere che il polinomio caratteristico risultante:

$$D = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1} & \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

non sia identicamente nullo.

Nella dimostrazione del teorema che daremo ci varremo del ben noto Lemma

Se A e B *sono due operatori differenziali lineari a coefficienti costanti, condizione necessaria e sufficiente perchè ogni soluzione dell'equazione* Af = 0 *verifichi l'equazione* Bf = 0 *è che il polinomio* B *sia divisibile per* A.

Teorema. - **Condizione necessaria e sufficiente affinché le soluzioni del sistema (1) siano armoniche è che:**

$$D = c\Delta_2^{\frac{n}{2}} = c\Delta_2^{k} \qquad (c \text{ costante} \neq 0)$$

per cui $n = 2k$, $(k = 1,\ 2,\ 3, \dots)$ **inoltre** D_{rs} **risulti divisibile per** Δ_2^{k-1} (*ove con* D_{rs} *indichiamo il complemento algebrico di* Δ_{rs} *di ordine* $n-1$ *in* D).

La condizione è sufficiente. Infatti in virtù delle nostre ipotesi sarà possibile considerare n^2 operatori lineari L_{ri}, tali che:

$$L_{ri} = \frac{D_{ri}\Delta_2^{\cdot}}{D}$$

e quindi, per dimostrare l'armonicità della generica $X^{(r)}$, basterà agire sulle n equazioni del sistema (1) successivamente con $L_{1'}$, $L_{2'}, \dots, L_{n'}$, indi sommare le n equazioni che così si ottengono e si avrà:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta_{k'} L_{k_r} X^{(r)} + \sum_{j=1,2\dots r-1,\ r+1,\dots n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj} L_{k'} X^{(j)} = 0 \tag{3}$$

cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{kr} D_{kr}}{D} \Delta_2 X^{(r)} + \sum_{j=1,2,\dots r-1,\ r+1,\dots n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj} \frac{D_{kr}}{D} \Delta_2 X^{(j)} = 0.$$

La prima sommatoria diviene:

$$\frac{\Delta_2}{D}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k r} D_{k r} X^{(r)} = \frac{\Delta_2}{D} D X^{(r)} = \Delta_2 X^{(r)}.$$

La seconda si annulla essendo

$$\frac{\Delta_2}{D}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k j} D_{k r} X^{(j)} = 0. \qquad (j = 1, 2, \dots r-1, r+1 \dots n)$$

In definitiva:

$$\Delta_2 X^{(r)} = 0.$$

Mostriamo ora la necessità della condizione.

Per ipotesi sappiamo che le $X^{(1)} \dots X^{(n)}$ sono armoniche. Indichiamo pertanto con F una soluzione dell'equazione

$$DF = 0. \tag{4}$$

È evidente che potremo ottenere gruppi di soluzioni del sistema ponendo:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= D_{r1} F \\ X^{(2)} &= D_{r2} F \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ X^{(n)} &= D_{rn} F. \end{aligned} \tag{5}$$

In virtù delle ipotesi, si avrà:

$$\Delta_2 D_{rs} F = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \dots n) \tag{6}$$

Ora, siccome ogni integrale della (4) è anche soluzione della (6) segue per il lemma precedente che il polinomio caratteristico $\Delta_2 D_{rs}$ è divisibile per D, cioè:

$$\frac{\Delta_2 D_{rs}}{D} = L_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, \dots n) \tag{7}$$

dove L_{rs} è un polinomio lineare nelle indeterminate $\xi_1 \dots \xi_m$.

Peraltro il determinante delle L_{rs} vale:

$$L = \begin{vmatrix} L_{11} \dots L_{1n} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ L_{n1} \dots L_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{D_{11}\Delta_2}{D} \dots \frac{D_{1n}\Delta_2}{D} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{D_{n1}\Delta_2}{D} \dots \frac{D_{nn}\Delta_2}{D} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_2^{\,n}}{D}$$

ma essendo L e D, polinomi interi di grado n, dovrà essere $D = \Delta_2^{\frac{n}{2}}$ in quanto Δ_2 è irriducibile, cioè $n = 2k$ e quindi necessariamente pari. Per la (7) avremo infine:

$$L_{rs} = \frac{\Delta_2 D_{rs}}{\Delta^k} = \frac{D_{rs}}{\Delta_2{}^{k-1}}$$

e questo è quanto si voleva provare.

Osservazione. - Il prof. CIMMINO ha dimostrato che nello spazio a tre dimensioni non possono sussistere sistemi di tre equazioni del tipo qui in istudio. La cosa ora è ovvia in quanto n deve essere pari.