Fabio Conforto

# Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **4** (1949), n.1, p. 6–13.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_6_0>

# Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane.

Nota (*) di FABIO CONFORTO (a Roma).

**Sunto.** - *Per un corpo* K *di funzioni abeliane di* $\pi$ *variabili* $u_1$ $u_2, \dots, u_\pi$, *relativo ad una matrice di* RIEMANN $\omega$, *coincidono i tre problemi di determinare gli automorfismi di* K, *le trasformazioni birazionali in sè della* $V_\pi$ *di* PICARD *associata a* K, *le congruenze univocamente invertibili del tipo* $u' \equiv \Lambda u + \lambda$ (*mod.* $\omega$). *Nel caso quasi abeliano tale coincidenza viene a mancare perchè l'analoga della* $V_\pi$ *di* PICARD *si può considerare in due modi distinti ed una congruenza del tipo predetto può anche rappresentare una trasformazione trascendente della* $V^\pi$ *in sè.*

1. Sia $\omega$ una matrice di RIEMANN di genere $\pi$, $K$ il relativo corpo di funzioni abeliane di $\pi$ variabili, che indico con $u_1, u_2, \dots, u_\pi$, $V_\pi$ l'annessa varietà di PICARD a $\pi$ dimensioni, definita a meno di trasformazioni birazionali ed in corrispondenza (generalmente) biunivoca con il parallelopipedo dei periodi.

È noto [1] che le funzioni del corpo $K$ si rispecchiano in tutte e sole le funzioni razionali della $V_\pi$ e che sulla $V_\pi$ le variabili indipendenti $u_1, u_2, \dots, u_\pi$ danno luogo a $\pi$ integrali semplici di differenziale totale di prima specie linearmente indipendenti.

Risultati classici della teoria delle funzioni abeliane permettono allora di affermare che i seguenti tre problemi:

(*) Il contenuto di questa nota è stato oggetto di una Comunicazione al III Congresso dell'Unione Matem. Italiana (Pisa, 23-26 settembre 1948).

[1] Per le proposizioni qui richiamate sulle funzioni abeliane cfr. ad es. il mio volume: *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, p. I (« Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica », Roma, 1942), in ispecie il cap. II.

$a$) determinazione di tutti gli automorfismi del corpo $K$;

$b$) determinazione di tutte le trasformazioni birazionali in sè della varietà $V_\pi$;

$c$) determinazione di tutte le matrici quadrate d'ordine $\pi$, del tipo:

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1\pi} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\pi 1} & \dots & \lambda_{\pi\pi} \end{matrix} \right\| \tag{1.1}$$

tali che le congruenze:

$$u'_h \equiv \sum_{1}^{\pi}{}_k \lambda_{hk} u_k + \lambda_h \quad (\mathrm{mod.}\ \omega) \qquad (h = 1, 2, \dots, \pi) \tag{1.2}$$

siano univocamente invertibili;
coincidono perfettamente tra loro.

**2.** Nella presente nota mi propongo di chiarire perchè la coincidenza dei tre problemi $a$), $b$), $c$) viene a mancare quando si passa dalla teoria delle funzioni abeliane alla nuova teoria delle funzioni quasi abeliane, che ha fatto l'oggetto di una recente Memoria di F. SEVERI (2). Poichè l'anzidetta coincidenza è alla base almeno di una parte della cosiddetta *teoria aritmetica delle funzioni abeliane*, quale è stata sviluppata in classici lavori di G. SCORZA (3), le considerazioni che seguono valgono così a dare qualche opportuno orientamento per la costruzione di un' analoga *teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane*, che è agli inizii ed alla quale ho dedicato una prima memoria (4).

**3.** Prendiamo le mosse da un corpo $K$ di funzioni quasi abeliane di $\pi$ variabili, relativo ad una tabella di periodi primitivi $\omega$,

(2) F. SEVERI: *Funzioni quasi abeliane*, « Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia », n. 4, 1947; tale Memoria sarà in seguito citata con la sigla F. Q. A.

(3) Cfr. ad es. le due memorie fondamentali di G. SCORZA: *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni* « Rend. Palermo », t. 41, 1916 e *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*, « Rend. Palermo », t. 45, 1921.

(4) F. CONFORTO: *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in, ispecie nel caso di genere effettivo nullo* (in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica »).

che suppongo nella forma normale di SEVERI [5]:

$$(3.1) \qquad \omega = \begin{Vmatrix} A^{(p,p)} & \Omega^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Omega_1^{(\delta_1,p)} & B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Omega_2^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{Vmatrix}$$

dove s'intende $\pi = p + \delta_1 + \delta_2 (\pi \geq 0,\ \delta_1 \geq 0,\ \delta_2 \geq 0)$ e $\Omega_1^{(\delta_1,p)}$ indica una matrice a $\delta_1$ righe e $p$ colonne (e similmente negli altri casi), $O^{(r,s)}$ indica la matrice ad elementi tutti nulli ad $r$ righe ed $s$ colonne, $\| A^{(p,p)}\ \Omega^{(p,p)} \|$ è una qualunque matrice di RIEMANN normale di genere $p$ (per guisa che $A^{(p,p)}$ sarà la matrice diagonale:

$$A^{(p,p)} = \begin{Vmatrix} \frac{2\pi i}{d_1} & & \\ & \frac{2\pi i}{d_2} & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2\pi i}{d_p} \end{Vmatrix}$$

ove $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sono interi positivi tali che $d_1 = 1$ e ciascuno dei $d_\iota$ è multiplo di $d_{\iota-1}$), $B^{(\delta_1,\delta_1)}$ è la matrice diagonale per la quale tutti gli elementi della diagonale principale valgono $2\pi i$. La $\omega$ risulta così una matrice a $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ righe e $2p + \delta_1$ colonne.

Ciò premesso, come conseguenza del fatto che ogni corpo di funzioni quasi abeliane è costituito *per definizione* da funzioni che ammettono un teorema (algebrico) di addizione nel senso di WEIERSTRASS [6], si possono scegliere entro il dato corpo $K$ $\pi + 1$ funzioni, legate tra loro da una (unica) relazione algebrica, rappresentativa di una varietà algebrica $V_\pi$, definita a meno di trasformazioni birazionali, in corrispondenza generalmente biunivoca col prisma dei periodi, che è la varietà quasi abeliana di PICARD, associata a $K$. Come nel caso abeliano, le funzioni del corpo $K$ si rispecchiano allora in tutte e sole le funzioni razionali della $V_\pi$, mentre le variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ danno luogo sulla $V_\pi$ ad altrettanti integrali semplici di differenziale totale linearmente indipendenti, da considerarsi come *virtualmente di prima specie* sulla $V_\pi$. Sia $W$ la varietà della $V_\pi$ riempita dai punti singolari (e d'indeterminazione) di tali integrali.

**4.** Siamo ora in grado di discutere se e sino a qual punto i tre problemi *a*), *b*), *c*) del n. 1 coincidano tra loro nel caso quasi abeliano.

(5) F. Q. A., nn. 28 e 37

(6) F. Q. A., Introduzione.

Per i problemi *a*) e *b*) tutto va come nel caso abeliano, ossia essi coincidono perfettamente.

Ciò è del tutto naturale, giacchè è subito visto che *per qualsiasi varietà algebrica* $V_\pi$ *coincidono i due problemi della determinazione delle trasformazioni birazionali in sè della* $V_\pi$ *e degli automorfismi del relativo corpo* K *di funzioni razionali.*

Se infatti la trasformazione (birazionale) $T$ muta la $V_\pi$ in sè, ogni funzione razionale della $V_\pi$ viene mutata dalla $T$ o dalla $T^{-1}$ in una funzione razionale; la somma ed il prodotto di due funzioni razionali viene inoltre mutato dalla $T$ nella somma e nel prodotto delle due funzioni corrispondenti. La $T$ induce per conseguenza un automorfismo nel corpo $K$.

Inversamente, sia ora $T$ un automorfismo di $K$: mostriamo che ad esso risponde una trasformazione birazionale in sè della $V_\pi$.

All'uopo, si consideri in uno spazio lineare $S_{\pi+1}$, dove

$$x_1, \; x_2, \dots, \; x_{\pi+1}$$

siano coordinate non omogenee di punto, un modello proiettivo della $V_\pi$ di equazione:

$$F(x_1, \; x_2, \dots, \; x_{\pi+1}) = 0, \tag{4.1}$$

essendo $F$ un polinomio. Ogni funzione di $K$ sarà allora una funzione razionale delle $x_i (i = 1, \; 2, \dots, \; \pi + 1)$.

Siano rispettivamente $x_1', x_2', \dots, x_{\pi+1}'$ le funzioni corrispondenti per l'automorfismo $T$ alle $x_1, \; x_2, \dots, \; x_{\pi+1}$. Sarà allora:

$$F(x_1', \; x_2', \dots, \; x_{\pi+1}') = 0, \tag{4.2}$$

giacchè ogni automorfismo conserva tutte le relazioni razionali.

La corrispondente in $T$ di ogni funzione di $K$, ossia di ogni funzione razionale delle $x_1, \; x_2, \dots, \; x_{\pi+1}$ si otterrà da questa stessa funzione razionale, sostituendo gli argomenti $x$ con gli argomenti $x'$.

La corrispondente di ogni funzione di $K$ risulta così una funzione razionale di $x_1', \; x_2', \dots, \; x_{\pi+1}'$. Inversamente, ogni funzione razionale delle $x_1', \; x_2' \dots, \; x_{\pi+1}'$ proviene dalla funzione razionale delle $x_1, \; x_2 \dots, \; x_{\pi+1}$, che si ottiene sostituendo in essa le $x'$ con le $x$. Ne segue, tenuto conto che ogni automorfismo è una corrispondenza *biunivoca* tra le funzioni di $K$, che si ottengono tutte le funzioni di $K$ considerando la totalità delle funzioni razionali in $x_1', \; x_2', \dots, \; x_{\pi+1}'$. Anche le $x_1, \; x_2, \dots, \; x_{\pi+1}$ saranno perciò esprimibili razionalmente mediante le $x_1', \; x_2', \dots, \; x_{\pi+1}'$.

Ma allora, essendo le $x'$ funzioni razionali delle $x$ e viceversa, tenuto conto delle (4.1) e (4.2), è subito visto che le formule che esprimono le $x'$ in funzione razionale delle $x$ rappresentano una trasformazione birazionale della $V_\pi$ in sè.

La trasformazione così trovata induce d'altronde in $K$ proprio l'automorfismo $T$, perchè muta le $x$ nelle $x'$ e quindi ogni funzione razionale delle $x$ nella stessa funzione, in cui le $x$ si sostituiscono con le $x'$, ossia ogni funzione di $K$ nella funzione ad essa corrispondente per l'automorfismo $T$.

**5.** Dopo l'osservazione del n. 4, torniamo ora al caso, in cui $K$ sia il corpo di funzioni quasi abeliane del n. 3 e $V_\pi$ la relativa varietà quasi abeliana di PICARD. Mercè l'isomorfismo tra $K$ ed il corpo delle funzioni razionali della $V_\pi$, si conclude allora subito la coincidenza dei due problemi *a*) e *b*) del n. 1 anche nel caso quasi abeliano.

Occorre però ora fare un'osservazione importante. La varietà $V_\pi$ può essere considerata in due accezioni distinte: essa può essere considerata *in sè* oppure come *varietà quasi abeliana*. Quando la $V_\pi$ si considera come la varietà quasi abeliana di PICARD, relativa al corpo $K$, essa *nasce* insieme al sistema dei $\pi$ integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ del n. 3 da considerarsi come virtualmente di prima specie. con la tabella di periodi 3.1, i quali individuano sulla $V_\pi$ la varietà $W$. La considerazione della $V_\pi$ come varietà quasi abeliana di PICARD non può e non deve dunque essere mai disgiunta dalla considerazione degli integrali anzidetti. Quando invece si prescinde da tali integrali, la $V_\pi$ viene considerata *in sè*.

Ora, ovviamente, nelle considerazioni del n. 4, la $V_\pi$ è stata considerata *in sè*. Potrà perciò darsi che una trasformazione birazionale della $V_\pi$ in sè *non* debba più considerarsi tale quando, come è nella natura della questione, si consideri invece la $V_\pi$ come varietà quasi abeliana di PICARD.

Ragioni di analogia col caso abeliano e, soprattutto, la circostanza che dalla formula (1.2) (nella quale ora si suppone che $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ siano gli integrali virtualmente di prima specie sulla $V_\pi$ quasi abeliana) un $u_h'$ può risultare infinito solo quando lo sia qualcuno degli $u_k$, conducono a considerare come trasformazioni birazionali in sè della $V_\pi$, *considerata come varietà quasi abeliana di* PICARD, solo quelle trasformazioni birazionali, che siano rappresentate da congruenze lineari univocamente invertibili tra gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, ossia da formule del tipo (1.2). Si ottengono così trasformazioni birazionali della $V_\pi$ in sè, per le quali la varietà $W$ è invariante; e si entra così a contatto col problema *c*) del n. 1.

**6.** Indicando con $u$, $u'$, $\lambda$ tre matrici a $\pi$ righe e ad una colonna, che abbiano come elementi rispettivamente le $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, le $u_1', u_2', \ldots, u_\pi'$, le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$, la formula (1.2) tenuto conto della (1.1), si può mettere nella forma:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \quad (\text{mod. } \omega) \tag{6.1}$$

dove per la $\omega$ sarà ora da intendersi la matrice (3.1).

Ciò premesso, è anzitutto ovvio che una qualunque trasformazione birazionale della $V_\pi$ considerata *in sè* non può sempre essere rappresentata da equazioni come la (6.1). Invero, la $V_\pi$ considerata in sè può concepirsi come il prodotto di una varietà di PICARD abeliana a $p$ dimensioni per uno spazio lineare a $\delta_1 + \delta_2$ dimensioni (7); ed è subito visto che una simile varietà ammette un gruppo continuo infinito di trasformazioni birazionali in sè, mentre dalla (6.1) appare disponibile al più un numero finito di parametri.

È dunque a priori escluso che il problema *a*) o *b*) del n. 1 coincida nel caso quasi abeliano col problema *c*). Ciò tuttavia quando si prendano in esame le trasformazioni birazionali della $V_\pi$ considerata *in sè*.

Si potrebbe però pensare che il problema *b*) coincidesse automaticamente col problema *c*), considerando le trasformazioni birazionali della $V_\pi$ *concepita come varietà quasi abeliana:* giacchè queste trasformazioni (n. 5) sono *definite* appunto come quelle, che siano rappresentate da congruenze del tipo (6.1) univocamente invertibili.

Ma nemmeno in questo modo si ottiene sempre la coincidenza dei problemi *b*) e *c*). Ciò dipende dal fatto che una relazione (6.1), anche quando sia univocamente invertibile, può rappresentare una trasformazione in sè della $V_\pi$, la quale non sia più birazionale, ma *trascendente.*

Ciò risulta dalla mia memoria, citata in (4), nella quale ho anzitutto determinato qualunque sia la matrice (3.1), una condizione necessaria, perchè una relazione (6.1) sia univocamente invertibile: occorre all'uopo che sia soddisfatta una *condizione di Hurwitz generalizzata* (8), ossia che esista una matrice quadrata $I$ ad elementi interi tale che:

$$\omega I = \Lambda \omega\,; \tag{6.2}$$

(7) F. Q. A., n. 54.

(8) A vero dire nella memoria citata in (4) sono partito da una tabella di periodi meno generale della 3.1, avendo supposto i divisori elementari $d_1, d_2, \ldots, d_p$ tutti unitari. Il ragionamento del n. 3 della memoria, nel quale si stabilisce la relazione generalizzata di HURWITZ, sta però tale e quale qualunque siano i divisori elementari.

successivamente, nel caso particolare in cui nella (3.1) sia $p = 0$, ho determinato effettivamente tutte le matrici $\Lambda$, per le quali la (6.1) è univocamente invertibile. Ho così trovato che tutte e sole e ciascuna una volta sola le trasformazioni in sè di una certa $V_\pi$ (relativa al caso $p = 0$), rappresentabili da congruenze come la (6.1), si ottengono dalle formule:

$$u' \equiv \begin{Vmatrix} \alpha^{(\delta_1, \delta_1)} & \beta^{(\delta_1, \delta_2)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} & \gamma^{(\delta_2, \delta_2)} \end{Vmatrix} u + \lambda \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{6.3}$$

quando $\alpha^{(\delta_1, \delta_1)}$ percorra tutte le matrici a coefficienti interi il cui determinante vale $\pm 1$, le matrici $\beta^{(\delta_1, \delta_2)}$ e $\gamma^{(\delta_2, \delta_2)}$ siano assolutamente arbitrarie, salvo la condizione che la $\gamma^{(\delta_2, \delta_2)}$ abbia il determinante non nullo, e le $\lambda_i$ siano arbitrarie, ma, per ciascuna trasformazione, determinate a meno di periodi.

Le nominate trasformazioni si dividono perciò in *schiere* $\infty^\pi$ (una schiera ottenendosi fissando le $\alpha^{(\delta_1, \delta_1)}$, $\beta^{(\delta_1, \delta_2)}$, $\gamma^{(\delta_2, \delta_2)}$ e lasciando liberamente variare la matrice $\lambda$), le quali sono *sempre infinite* (salvo nel caso $\pi = \delta_1 = 1$, $\delta_2 = 0$).

Se ora la $\beta^{(\delta_1, \delta_2)}$ è nulla, dimostro che le (6.3) rappresentano trasformazioni *birazionali* della $V_\pi$ in sè; se invece la $\beta^{(\delta_1, \delta_2)}$ non è nulla si ottengono trasformazioni *trascendenti*.

Da ricerche, che ho in corso, sembrerebbe risultare che trasformazioni trascendenti di una $V_\pi$ in sè si possono presentare in casi ben più generali di quello in cui, per essere $p = 0$, la (3.1) assume la formula semplicissima:

$$\begin{Vmatrix} B^{(\delta_1, \delta_1)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} \end{Vmatrix}.$$

Ma, comunque sia di ciò, è certo che il fatto può presentarsi. E quando esso si presenti, una trasformazione *trascendente* della $V_\pi$ in sè *non* dà certo luogo ad un automorfismo del corpo $K$ (n. 4), onde non possono coincidere i problemi *b*) (od *a*)) e *c*). Se però le trasformazioni trascendenti mancano, i due problemi *b*) e *c*) sono effettivamente lo stesso problema, purchè, s'intende, si considerino solo le trasformazioni birazionali della $V_\pi$ in sè, concependo la $V_\pi$ come varietà quasi abeliana.

**7.** Riassumendo l'analisi svolta si può concludere:

*Se la* $V_\pi$ *viene considerata in sè, i due problemi* a) *e* b) *coincidono tra loro ma sono certo distinti dal problema* c) (purchè sia $\delta_1 + \delta_2 > 0$).

*Se la* $V_\pi$ *viene considerata come varietà quasi abeliana, i tre* *problemi* a), b) *e* c) *coincidono quando tutte le congruenze lineari univocamente invertibili tra gli integrali virtualmente di prima specie rappresentano trasformazioni birazionali della* $V_\pi$ (purchè naturalmente si considerino solo le trasformazioni birazionali della $V_\pi$ ed i corrispondenti automorfismi, che risultano dal riguardare la $V_\pi$ come varietà quasi abeliana).

*Pur considerando la* $V_\pi$ *come varietà quasi abeliana, i due problemi* a) *e* b) (coincidenti tra loro) *non coincidono col problema* c) *se vi sono (e vi possono essere di fatto) congruenze lineari univocamente invertibili tra gli integrali virtualmente di prima specie, che rappresentino trasformazioni trascendenti della* $V_\pi$ *in sè.*

Da questi enunciati si vede chiaramente che la mancata coincidenza dei tre problemi *a*), *b*), *c*) nel caso quasi abeliano dipende essenzialmente dalle due circostanze seguenti:

I. – *La varietà* $V_\pi$ *di* PICARD *associata ad un corpo di funzioni quasi abeliane, può essere considerata in due modi distinti: in sè e come varietà quasi abeliana.*

II. – *Possono esistere congruenze univocamente invertibili del tipo della* (1.2), *che non rappresentano sulla* $V_\pi$ *trasformazioni birazionali, sibbene trascendenti.*