Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Contributo dei recenti risultati delle multigrade al problema di Waring

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 75–79.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_75_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Contributo dei recenti risultati delle multigrade al problema di Waring.

Nota di GIUSEPPE PALAMA (a Lecce).

Sunto. - *In questo lavoro si utilizzano alcuni recenti risultati relativi alle multigrade per dare un Contributo al problema di* WARING.

§ 1. **Richiamo di simboli.** — Occorre innanzi tutto richiamare alcuni dei simboli in uso nel problema di WARING.

1. Con $r'_{k,s}(N)$ si indica il numero delle rappresentazioni primitive di N come somma di s potenze k^{me} positive, (non computando quelle che nascono dalle permutazioni delle basi).

2. $\gamma(k)$ denota il più piccolo valore di n nella

$$x_1^k + \dots + x_m^k = y_1^k + \dots + y_n^k, \qquad m < n,$$
$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 1,$$

tale che essa ha un'infinità di soluzioni non banali.

3. $v(k)$ sta per il più piccolo valore di s tale che ogni intero N, (pos. o neg.), può essere espresso nella forma

$$N = \varepsilon_1 m_1^k + \dots + \varepsilon_s m_s^k,$$

con m_i interi positivi o nulli e $\varepsilon_i = \pm 1$.

4. $J(k)$ denota il più piccolo valore di j tale che

$$a_1, \dots, a_j \overset{k-2}{=} a_1', \dots, a_j'$$

ha una soluzione.

5. $M(k)$ è il più piccolo valore di j tale che

$$a_1, \dots, a_j \overset{k}{=} a_1', \dots, a_j' \tag{1}$$

ha una soluzione non banale con

$$a_1^{k+1} + \dots + a_j^{k+1} \neq b_1^{k+1} + \dots + b_j^{k+1}.$$

6. $N(k)$ è il più piccolo valore di j tale che (1) ha una soluzione non banale.

2. **Risultati di Wright.** — Riportiamo qui alcuni dei risultati di E. M. Wright che vogliamo migliorare.

1. Se $3 \leq k \leq 9$, allora:

$r'_{k,k}(N) \geq 2$, per una infinità di valori di N, [1]
$\gamma(k) \leq k$ [2].

2. $\gamma(k) \leq A$, $J(k) \leq A - 1$,

[1] Cfr. E. Maitland Wright, *On sums of* k — th *powers*, « Jour. of the London Math. Soc. », vol. 10, (1935), p. 95.
[2] Cfr. l. c. in [1].

per k e A dati dalla seguente tabella (3)

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	11	15	15	19	25	33	41	51	59	71	81	103	141	281	505	649	865	1121	1281	1601	1961

3. $\gamma(k) = O(e^{0,266k}) = O(1,3047^k)$ (4).

4. $J(k) = k - 1$, per $3 \leq k \leq 9$ (5).

5. $J(k) = O\left(204^{\frac{k}{20}}\right) = O(10^{0,1155k}) = O(e^{0,266k}) = O(1,3047)$ (6).

6. $v(k) = O\left(160^{\frac{k}{19}}\right) = O(2^{0,385k})$ (7).

7. $M(k) \leq 14\left[\frac{1}{144}k^2(k-11)^2 + 4\right] = \frac{7}{72}k^2(k-11)^2 + 56$ (8).

§ 3. **Miglioramento dei precedenti risultati di Wright.** — Innanzi tutto riportiamo qui la seguente tabella (9):

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
B	9	10	14	14	20	30	30	30	38	48	58	58	65	86	100	<200	<400	<800

1. Tenendo presente un teor. dimostrato da WRIGHT (10) e la precedente tabella, si hanno i seguenti teoremi.

TEOR. 1. - Se $3 \leq k \leq 11$, allora

$$r'_{k.k}(N) \geq 2 \quad \text{per una infinità di } N;$$

TEOR. 2.

$$\gamma(k) \leq B + 1, \qquad J(k) \leq B$$

per k e B dati dalla precedente tabella.

(3) Cfr. l. c. in (1) ed idem, p. 98.

(4) Cfr. l. c. in (1) in cui però invece di $O(1,307^k)$ si deve leggere $O(1,3047^k)$

(5) Cfr. l. c. in (1), p. 98.

(6) Cfr. l. c. in (1), p. 99.

(7) Cfr. E. M. WRIGHT, *An easier* WARING'S *problem*, « Jour. of the London Math. Soc. », vol. 9, part. 4, p. 272.

(8) Cfr. E. M. WRIGHT, *On* TARRY'S *problem (II)*, « Quarterly Jour. of Math. » (Oxford Series), vol. 7, n. 25, (marzo 1936), p. 43.

(9) Cfr. A. GLODEN, *Mehrgradige Gleichungen*, Groningen (1944), p. 58.

(10) Cfr. l. c. in (1), teor. 5.

2. WRIGHT ha dimostrato il seguente teor. (11)
« è

$$J(k) = O\left((2J_0)^{\frac{k}{k_0-1}}\right), \tag{2}$$

se k_0 è un prefissato valore di k e se $J_0 = J_0(k)$ ».

Ora se in (2) facciamo $k_0 = 24$, poichè la tabella di questo § ci dà

$$J_0(24) = 100,$$

abbiamo

$$J(k) = O\left(200^{\frac{k}{23}}\right) = O(1{,}2591^k) = O(10^{0,100045k}) = O(e^{0,20304k}),$$

che migliora il corrispondente risultato di WRIGHT, (n. 5, del § 2).

3. Un altro risultato del sig. WRIGHT è il seguente (12)

$$v(k) = O\left((2J_0)^{\frac{k}{k_0-1}}\right),$$

che per $k_0 = 24$, ci dà

$$v(k) = O(1{,}2591^k) = O(2^{0.3324k})$$

che è un miglioramento del risultato del n. 6, § 2.

4. La (13)

$$M(R + t - 1) \leq 2N(rk) \max M(l), \quad 1 \leq l \leq t - 2$$

per $t = 13$, essendo, come si deduce dalla tab. di questo §, $M(11) = 14$, ed avendosi inoltre $\max M(l) = M(11)$, ci dà

$$1 \leq l \leq 11,$$

$$M(k + 12) \leq 28N(rk). \tag{3}$$

Ma si può scegliere r in modo da avere

$$k \leq 13r \leq k + 12$$

e d'altra parte è (13)

$$N(k) = \frac{1}{2}(k^2 + 3), \qquad (k \text{ dispari})$$

$$N(k) = \frac{1}{2}(k^2 + 4) \qquad (k \text{ pari}),$$

(11) Cfr. l. c. in (7), p. 271.

(12) Id.

(13) Cfr. E. M. WRIGHT *On* TARRY'S *problem (I)*, « Quarterly Jour. of Math. », (Oxford Series), vol. 6, n. 24, (dic. 1935), p, 261.

quindi dalla (3), si ha

$$M(k+12) \leq 14\left[\frac{1}{169}k^2(k+12)^2+4\right],$$

cioè cambiando k in $k-12$

$$M(k) \leq \frac{14}{169}k^2(k-12)^2+56$$

per qualsiasi k. Essa migliora, come subito si verifica, la formula del n. 7 del § 2.