BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UGO DAL BUONO

Sull'uso di considerazioni infinitesimali in geometria piana

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 82–82.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_82_0>

Sull'uso di considerazioni infinitesimali in geometria piana.

Nota di UGO DAL BUONO (a Reggio di Calabria).

Sunto - *È espresso nel seguente capoverso.*

Data una curva piana C, siano (ρ, θ) le coordinate polari del suo generico punto P, k la curvatura di C in P, h la distanza del polo 0 dalla tangente a C in P, s l'ascissa curvilinea di P su C. Valgono allora le formule ben note

$$(1) \qquad h = \rho^2 \frac{d\theta}{ds} \qquad\qquad (2) \qquad k\rho = \frac{dh}{d\rho},$$

la seconda delle quali serve ad esempio per stabilire la formula vettoriale di SIACCI. La loro dimostrazione rigorosa riesce piuttosto laboriosa; io qui le ottengo mediante considerazioni infinitesimali estremamente semplici.

Sia P_1 il punto consecutivo a P su C (il Lettore è pregato di disegnarsi la figura), talchè la tangente in P può venire assimilata alla retta PP_1 ed è

$$ds \backsim \overline{PP}_1. \qquad d\theta \backsim \widehat{POP}_1,$$

ove usiamo il segno $\backsim$ per denotare uguaglianza a meno di infinitesimi d'ordine superiore. I piedi N, N_1 delle perpendicolari abbassate da 0 rispettivamente sulle tangenti a C in P, P_1 giacciono sulla circonferenza di diametro OP_1, ond'è $\widehat{OP_1N} = \widehat{ON_1N}$. Ne consegue che, detti K ed H i piedi delle perpendicolari abbassate da P su OP_1 e da N su ON_1, i triangoli PP_1K, NN_1H risultano simili, sicchè:

$$(3) \qquad PK : KP_1 = NH : HN_1.$$

Ora è $OK \backsim OP$, $OH \backsim ON$, e quindi

$$KP_1 \backsim OP_1 - OP \backsim d\rho, \qquad HN_1 \backsim ON_1 - ON \backsim dh;$$

inoltre l'angolo $\widehat{NON_1}$ delle due normali uguaglia l'angolo di contingenza $\widehat{NP_1N_1} \backsim kds$. Dal triangolo NOH si ha dunque $NH \backsim hkds$, mentre da POK si deduce $PK \backsim \rho d\theta$, onde la (3) fornisce

$$(4) \qquad \rho d\theta : d\rho \backsim hkds : dh.$$

Infine, esprimendo in due modi diversi l'area del triangolo OPP_1, otteniamo l'uguaglianza $ON \cdot PP_1 = OP_1 \cdot PK$, che porge

$$(5) \qquad hds \backsim (\rho + d\rho)\rho d\theta \backsim \rho^2 d\theta.$$

Dalla (5) segue subito la (1), e combinando le (4), (5) si ricava la (2).

Ringrazio vivamente il chiarissimo prof. BENIAMINO SEGRE per l'assetto più generale dato a questa mia nota.