UMI

Recensioni

* B. Segre, Lezioni di geometria moderna, vol. I: Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi, Zanichelli, Bologna, 1948 (Fabio Conforto)
* N. Abbagnano, P. Buzano, A. Buzzati-Traverso, E. Frola, L. Geymonat, E. Persico, Fondamenti logici della scienza, Francesco De Silva, Torino, 1947 (Fabio Conforto)
* Proclus de Lycie, Les Commentaires sur le Premier Livre des éléments, Desclée de Brower er C.ie, Bruges, 1948 (Gino Loria)
* E. A. Milne, Vectorial Mechanics, Methuen, London, 1948 (G. Toraldo di Francia)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 83–93.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_83_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

RECENSIONI

B. SEGRE: *Lezioni di geometria moderna*, vol. I: *Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi*, pp. IV + 183 - Zanichelli, Bologna 1948.

Il presente libro costituisce il primo volume di un trattato, concepito in tre volumi; dedicato alla geometria proiettiva lineare, esso è infatti destinato ad essere seguito da un secondo volume sulla geometria proiettiva non lineare e da un ultimo volume sulle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali.

La novità della trattazione o, se si vuole, la sua « modernità », consiste nel fatto che essa viene eseguita a partire da un corpo qualunque, mentre la geometria proiettiva e algebrica « classica » muove sempre dal campo complesso. Ne deriva una visione estremamente generale e completamente rinnovata delle questioni geometriche anche classiche, che tende a portare la geometria sopra il piano già raggiunto dall'algebra con la costituzione della cosiddetta algebra moderna: ed è in questo senso che l'opera del SEGRE costituisce un trattato di geometria « moderna ».

Senonchè, qui torna opportuna qualche ulteriore precisazione, che varrà a far meglio cogliere il posto che occupa l'opera del SEGRE nella letteratura matematica recente.

Da varî anni algebra moderna e geometria algebrica tendono ad avvicinarsi. Tuttavia, i cultori dell'algebra moderna hanno dimostrato prevalentemente di ritenere che un apporto dell'algebra moderna alla geometria algebrica potesse riuscire proficuo soprattutto nella sistemazione dei fondamenti. Tale concetto ha per lo meno indubbiamente informato la serie di memorie *Zur algebraischen Geometrie* di B. L. VAN DER WAERDEN, il cui contenuto è entrato in parte nella *Einführung in die algebraische Geometrie* di questo autore, indi le più recenti ricerche di O. ZARISKI, fino al recentissimo volume *Foundations of algebraic geometry* di A. WEIL.

Nessuno nega ora l'importanza di tale indirizzo critico, chè anzi in molte questioni attinenti ai fondamenti della geometria algebrica, i metodi e lo spirito informatore dell'algebra moderna hanno mostrato tutta la loro potenza: basti ad es. ricordare la risoluzione del problema dello scioglimento delle singolarità, ottenuto per la prima volta da O. ZARISKI per le varietà a tre dimensioni.

È però del pari ovvio che i fondamenti della geometria non sono o per lo meno non possono esaurire la geometria stessa. Affermazione quest'ultima, alla quale — penso — tutti vorranno aderire, anche se poi non si sappia definire logicamente cosa sia... la geometria; giacchè, nel fatto, ogni matematico è ben conscio che, al di là delle questioni critiche, occorre poi procedere all'effettivo sviluppo in senso « costruttivo » della teoria, ossia, nel caso della geometria proiettiva ed algebrica, alla ricostruzione ed al ripensamento del nuovo spirito dell'algebra moderna dei risultati già ottenuti nel caso classico, per scoprire la vera natura di tali risultati ed aprire nuove vie alla ricerca sia verso problemi nuovi che verso problemi rimasti insoluti nell'ambito classico. Come giustamente osserva il SEGRE, se l'orientamento portato dall'algebra moderna dovesse condurre a mantenersi indefinitamente nel campo critico e dei fondamenti, « ai grandi pregi del nuovo orientamento resterebbe però associato un pericolo, qualora un'eccessiva astrattezza dei concetti e dei procedimenti dimostrativi avesse a limitare la fantasia creatrice, velando il lato più propriamente geometrico dei problemi e dei risultati, e costringendo l'intuizione entro aridi schemi ».

L'opera del SEGRE ha ora precisamente questo carattere « costruttivo », che ne costituisce la vera originalità. Non già dunque tanto originalità di questo o quel risultato particolare, chè anzi la materia di questo primo volume verte sopra questioni relativamente elementari, che già per buona parte si trovavano sparse nella letteratura, ma originalità di programma, in quanto il SEGRE ha il merito di avere nettamente veduto l'immenso campo di ricerche che si prospetta ai matematici dall'accostamento della mentalità algebrica moderna con lo sviluppo imponente della geometria proiettiva ed algebrica classica, ed ha per il primo, dopo aver validamente contribuito al nuovo indirizzo con notevoli ricerche personali, concepito il disegno di un trattato sull'argomento. Naturalmente, « il campo testè adombrato è vastissimo, ed ancor lungi dall'esser stato approfondito colla generalità e compiutezza inerenti alla mentalità algebrica moderna; perciò il Trattato, anzichè proporsi di essere esauriente e del tutto autonomo, cerca essenzialmente di esporre e di illustrare taluni riflessi geometrici caratteristici delle nuove più ampie concessioni algebriche, mostrando anche come la geometria algebrica si presti a sua volta ad applicazioni geometriche ed aritmetiche di tipo diverso da quello tradizionale ». Tale carattere per così dire sperimentale del trattato, ben lungi dal costituire un difetto, ne aumenta anzi il pregio ed è ben lecito sperare che esso, soprattutto in Italia dove più viva è la tradizione geometrica, valga a spingere nuove energie verso il nuovo campo, a cui esso è dedicato. Insomma, pur essendo il libro anche ricco di osservazioni critiche, più che di « Fondamenti di geometria sopra un corpo qualsiasi », come è indicato dal sottotitolo, ci si trova qui di fronte ai *primi sviluppi di una geometria in un corpo qualsiasi;* e si tratta di sviluppi suscettibili di essere fecondamente proseguiti nelle più varie direzioni.

Scendendo ora ad un esame più minuto del conienuto del volume pubblicato, giova dire che esso è diviso in due parti, dedicate rispettivamente alle « Nozioni fondamentali di algebra moderna » ed ai « Fondamenti di geometria proiettiva sopra un corpo qualsiasi ».

Nella prima parte, che comprende poco meno della metà del volume, l'A. espone in modo rapido e conciso i princìpî dell'algebra moderna, press'a poco nella estensione del primo volume dell'ormai classica *Moderne Algebra* di B. L. VAN DER WAERDEN. Come novità trattatistica va tuttavia già qui rilevato il maggior posto assegnato alla considerazione dei corpi non commutativi (che l'A. chiama semplicemente « corpi », riservando la denominazione di « campi » ai corpi commutativi), sui quali s'imperniera buona parte della trattazione della seconda parte. Dopo una breve introduzione, si passa così successivamente alla considerazione delle classi modulo p, dei gruppi, degli anelli, dei corpi e campi; introdotte poi le nozioni fondamentali di isomorfismo e di omomorfismo, si passa alla trattazione dei sottogruppi ed omomorfismi tra gruppi, dei sottoanelli ed ideali, dei sottocorpi e del campo fondamentale di un corpo dato, con la conseguente nozione di caratteristica di un corpo, alla trattazione dei polinomî a coefficienti appartenenti ad un anello o ad un corpo dato, alla teoria delle estensioni ed aggiunzioni dei corpi, per finire con lo studio delle prime proprietà dei corpi finiti.

Nella seconda parte, che ha carattere più originale, si introducono anzitutto (§ 13), come naturale estensione degli spazî lineari proiettivi reali o complessi, gli spazi lineari destri o sinistri, a partire da un corpo astratto qualunque. In tali spazî si ricostruiscono tutte le ordinarie nozioni (grafiche) della geometria proiettiva lineare classica: spazî lineari subordinati, spazio congiungente ed intersezione di due (o più) spazî dati, principio di dualità, coordinate proiettive omogenee o no, nozione di birapporto, sino a concludere con la generale dimostrazione del teorema di Desargues sui triangoli omologici. In rapporto a tale trattazione va osservato che, venendo a mancare in un corpo (*non commutativo*) la teoria delle equazioni lineari e dei determinanti (almeno nella sua forma ordinaria), è proprio la mentalità geometrica e non una banale generalizzazione di tipo analitico, che fa da guida per ottenere lo scopo voluto.

Nel successivo § 14, dedicato agli spazî *grafici*, l'influenza dei motivi geometrici si fa ancora più evidente. Definito uno spazio grafico ad n dimensioni, in modo essenzialmente geometrico, come uno spazio, nel quale, grosso modo, valgano tutte le proprietà di appartenenza e grafiche di uno S_n ordinario, uno spazio lineare (astratto) risulta senz'altro uno spazio grafico. Uno dei poli dell'intera trattazione consiste ora nella determinazione degli spazî grafici, che sono lineari. Tale problema viene sviscerato fino in fondo, sino cioè a caratterizzare nettamente gli spazî grafici, che sono lineari, con la costruzione del corpo astratto ad essi associato. Anzitutto, componendo secondo un'opportuna definizione di « composizione » due spazî grafici, si ottiene uno spazio grafico *riducibile*, che non è certo lineare, onde la nozione di spazio grafico è più ampia di quella di spazio lineare. Una condizione necessaria perchè uno spazio grafico sia lineare è perciò che esso sia *irriducibile*. Osservato poi che in ogni spazio grafico irriducibile di dimensione $n \geq 3$ vale il teorema di Desargues, mentre esistono piani grafici non desarguesiani, si ricava, come condizione necessaria perchè uno spazio grafico irriducibile sia lineare, la condizione che in esso valga il teorema di Desargues. Le condizioni della irriducibilità e della validità del teorema di Desargues sono ora anche sufficienti perchè uno spazio grafico sia lineare; e, con il metodo di Staudt, si possono allora introdurre in esso coordinate proiettive, ciò che conduce a costruire il corpo associato allo spazio considerato. Tale corpo risulta un campo allora ed allora soltanto che nello spazio valga il teorema di Pappo-Pascal (spazio grafico pascaliano). L'A. offre in tal modo una trattazione esauriente e brillare dei reciproci rapporti tra varî postulati della geometria proiettiva, nella quale, con molti complementi e semplificazioni, si trovano sintetizzate molte ricerche precedenti di varî altri autori.

I successivi due paragrafi sono dedicati allo studio degli spazi grafici pascaliani, ossia degli spazi lineari sopra un campo. Nel § 15 vengono introdotte le coordinate plückeriane e grassmanniane in un tale spazio e discusse varie questioni relative ad esse. Nel più ampio § 16 la costruzione della geometria proiettiva negli spazî grafici pascaliani viene spinta ancora innanzi sul modello del caso classico, con lo studio delle omografie (tra spazî distinti o coincidenti, omografie degeneri e non degeneri, modo di individuare un'omografia, problema dei punti uniti, omografie involutorie), delle correlazioni e reciprocità, delle polarità, dei sistemi nulli, ecc.... Caratteristico in questi argomenti è il comportamento in un certo senso anomalo degli spazi costruiti sopra un campo di caratteristica 2. Gli ultimi numeri del paragrafo, nei quali si fa uso anche di alcune nozioni sulle varietà algebriche, sono dedicati a certe proprietà delle coppie n-simplessi di uno S_{n-1} pascaliano ($n \geq 3$). Si espone in particolare una bella generalizzazione del teorema di DESARGUES e si studia a fondo una trasformazione birazionale punto-iperpiano associata intrinsecamente ai due simplessi. Il volume termina con un breve paragrafo sopra gli spazî lineari finiti, in cui è specialmente notevole la considerazione di talune configurazioni collegate a tali spazî.

Un'ampia bibliografia può utilmente orientare lo studioso anche in vista di nuove ricerche nell'ordine di idee esposto nel libro. È da augurarsi che presto vedano la luce le altre due parti annunciate del trattato, che arricchisce la letteratura matematica di un'opera, la quale dimostra la perenne fecondità dell'intuizione geometrica e la capacità di sempre rinnovarsi della geometria italiana.

FABIO CONFORTO

N. ABBAGNANO, P. BUZANO, A. BUZZATI-TRAVERSO, E. FROLA, L. GEYMONAT, E. PERSICO: *Fondamenti logici della scienza* - Torino, Francesco De Silva, 1947

Il presente volume riproduce una serie di otto conferenze sul problema metodologico della scienza, tenute per iniziativa dell'Unione Culturale di Torino. Ecco i titoli delle varie conferenze con i rispettivi autori: I. L. GEYMONAT, *Le origini della metodologia moderna*; II. E. PERSICO, *Analisi del determinismo fisico*; III. A. BUZZATI-TRAVERSO, *Il metodo fisicalista in biologia;* IV. P. BUZANO, *Critica dei fondamenti della geometria*; V. e VI. E. FROLA, *La matematica come lingua chiusa e la conoscenza del mondo fisico;* VII. L. GEYMONAT, *La crisi della logica formale;* VIII. N. ABBAGNANO, *Il problema filosofico della scienza.*

Già dai titoli delle conferenze svolte appare che i temi trattati involgono questioni assai elevate e delicate. Vanno perciò lodati gli Autori, i quali non solo hanno saputo esporre i loro temi in forma piana e facilmente accessibile, ma hanno voluto introdurre anche in Italia un ordine di questioni da noi poco coltivato e sul quale in molti altri paesi si è invece creato un imponente movimento di idee e di discussioni, che è augurabile possa prendere piede anche presso i nostri studiosi.

Pur non potendosi parlare di una perfetta identità di vedute tra i varî autori su tutte le questioni di dettaglio, si può dire indubbiamente che un nucleo centrale di idee comuni è alla base di tutte le considerazioni svolte e circola, come un motivo dominante, attraverso tutto il volume. Si tratta del cosiddetto *empirismo logico* (o neopositivismo) promosso da quel gruppo di filosofi e di scienziati (M. SCHLICK, H. REICHENBACH, L. WITTGENSTEIN, R. CARNAP, F. WEISMANN, PH. FRANK, K. MENGER, ecc....), che prese il nome di « circolo di Vienna » ed ora prosegue nella « scuola di Chicago ». Sorto dall'empiriocriticismo di un MACH, influenzato dal logicismo di B. RUSSEL e dal formalismo di D. HILBERT, nonchè dalle più recenti teorie fisiche di A. EINSTEIN, W. HEISENBERG, ecc..., tale indirizzo è caratteristico per l'interesse all'analisi critica del valore conoscitivo delle scienze, cui si collegano molti dei moderni sviluppi della metodologia scientifica.

Nella prima delle sue conferenze il GEYMONAT pone in modo molto chiaro il concetto fondamentale della moderna metodologia: « Non ha senso discutere di un concetto, senza averlo previamente definito con la massima precisione. Non si può affermare la verità o la falsità di un asserto, senza aver specificato con esattezza il senso di esso, e sopra tutto il senso da attribuirsi alla prova della verità o falsità del medesimo. Non si può discutere di un problema, finchè esso conserva la forma di un vago indovinello, finchè esso resta un problema privo di un contenuto ben determinato ». Per quanto semplici ed ovvie possano sembrare le esigenze così poste, occorre pur non di meno riconoscere che ben numerosi sono nella storia della scienza gli esempî di idee che gli scienziati hanno accolto senza una preventiva accurata indagine del loro intimo significato. Si pensi soltanto nella matematica alle idee di « spazio », di « infinito », di « curva »; nella fisica a quelle di « causa », di « contemporaneità », di « corpuscolo », ecc....; e gli esempî si potrebbero moltiplicare in tutte le scienze. Si è ricorso a volta a volta all'evidenza, all'intuizione, al sentimento, al linguaggio comune per darsi una ragione dell'uso di tali idee e concetti. In armonia con la sua veduta fondamentale, la metodologia moderna tende perciò soprattutto a svincolare il linguaggio scientifico da quello comune, in modo da evitare i pericoli insiti in questo ed i problemi mal posti e senza senso: i termini scientifici di una teoria vanno usati secondo una determinata « grammatica », che stabilisce il senso da dare a tali termini ed i modo con cui essi possono essere tra loro combinati nella teoria stessa; e s'intende che ciascun termine può avere una « grammatica » diversa in ciascuna teoria scientifica.

Alla luce delle vedute sopra indicate, varie questioni di capitale importanza vengono esaminate con grande acutezza nelle conferenze anzidette. Tutte meriterebbero un esame critico approfondito, che non può certo essere qui svolto. Diremo perciò che per il matematico, in quanto tale, il maggior interesse si concentra sulle conferenze del Geymonat, del Buzano e del Frola.

Nella prima delle conferenze del Frola si troverà una chiarissima e ben netta esposizione del modo, secondo il quale la matematica viene concepita dal punto di vista neopositivista. La nostra disciplina appare qui identificata con l'insieme delle deduzioni logiche che, secondo regole esplcitamente dichiarate (i « canoni »), si deducono da un sistema di postulati (gli « antecedenti »), i quali a loro volta esprimono seltanto legami tra certi vocaboli (gli « originarî »), che « hanno unicamente significato funzionale, non possono riattaccarsi ad altro che a se stessi e sono definiti dalla funzione che essi compiono nella costruzione matematica »: gli « antecedenti » costituiscono in altre parole la (minima) definizione implicita degli « originarî ». L'A. non manca di difendere tale concezione da varie obbiezioni, che ad essa si possono muovere, talune delle quali anche molto sottili come quella che, pur ammesso che gli antecedenti e le regole logiche della matematica siano sufficienti a definirla in se stessa, occorre tuttavia pur sempre che all'enunciazione degli antecedenti e dei canoni *preceda* una dichiarazione di non usare altri vocaboli e di non dare ai vocaboli altri significati se non secondo le norme che antecedenti e canoni fissano: dichiarazione questa, che necessariamente dovrebbe farsi in uan lingua diversa dalla matematica, onde non sarebbe vero che il linguaggio matematico sarebbe « chiuso », non riattaccantesi a nulla di estraneo ed a nessuna verità esteriore, sicchè esso potrebbe anche sorgere dal nulla. Secondo il Frola, a tale obbiezione si ripara osservando che, se l'anzidetta dichiarazione appare effettivamente come necessaria, non per questo la matematica deve necessariamente sorgere su di un preesistente linguaggio ordinario, anche se ciò è sempre accaduto storicamente ed accade tuttora quotidianamente. Molto suggestiva riesce anche la veduta, brevemente affacciata dal Frola e poi più ampiamente ripresa dal Geymonat, secondo la quale gli stessi canoni non siano fissati da una specie di superrazionalità, ma possano essere liberamente posti. Non è tuttavia possibile considerare i canoni senza gli antecedenti (ossia separare in una lingua la « grammatica » dalla « sintassi »); risultano invece possibili diverse lingue chiuse, tra loro imparagonabili, che si possono costruire in piena libertà.

Soltanto poche parole possono qui essere dedicate alla concezione della fisica, quale essa è tratteggiata nella seconda conferenza del FROLA: ma il soggetto meriterebbe ben più lungo discorso. La fisica non appare qui più come la descrizione di una « realtà » esterna, ma come una « lingua aperta » facente uso di certi « protocolli » derivanti dall'interpretazione dei risultati delle esperienze in una determinata lingua matematica « chiusa ».

Nella conferenza sulla critica dei fondamenti della geometria, il BUZANO, dopo aver rapidamente riassunto l'evoluzione delle geometria da EUCLIDE ai giorni nostri, conclude con l'affermazione che la geometria non esiste al di fuori delle proposizioni che la costituiscono e cambia al variare di queste, respingendo la veduta (ENRIQUES) esprimente la esigenza di completare sotto l'aspetto reale la definizione implicita con un'*interpretazione concreta*, fissando mediante opportune osservazioni ed esperienze il significato dei termini non definiti.

Occorre infine soffermarsi brevemente sopra la conferenza sulla crisi della logica formale del GEYMONAT. Il problema qui discusso è quello delle antinomie logiche. Con felice sintesi, il GEYMONAT è riuscito, in poche pagine, a descrivere i varî tentativi messi in opera per eliminare tali paradossi, costatando gli scarsi risultati raggiunti. Si arriva così alle recenti vedute del GÖDEL, nelle quali le antinomie, da questo autore chiamate « proposizioni indecise », appaiono in qualche modo come intrinseche ad ogni lingua; si potrà bensì ampliare la lingua usata, in modo che questa o quella proposizione indecisa possa venir decisa, ma allora si presenteranno fatalmente nuove antinomie. Da tali constatazioni, il GEYMONAT si eleva alla veduta che non sia il caso di respingere a priori le proposizioni indecise. « La verità assoluta non è nè con RUSSELL, nè con HILBERT, nè con BROUWER, perchè non ha senso di parlare di verità assoluta. Non si tratta di pronunciarsi per l'una o per l'altra logica, ma di costruire non uno, ma tanti edificî teorici, cogliendo ciò che vi è bello in ciascuno di essi ». Secondo il GEYMONAT occorre elaborare con spirito critico spregiudicato diverse logiche, alle quali tuttavia, per non lavorare sul vuoto, sono da associare altrettante matematiche, giacchè una logica formale che non sia logica matematica è oggi inammissibile. Le matematiche zermeliana e non zermeliana sono un primo esempio di due matematiche costruite con due logiche diverse.

Dall'esame, pur largamente incompleto, compiuto in quanto precede risulta in modo forse già sufficiente la larghezza ed elevatezza delle idee svolte nel volume in questione. Solo l'eventuale effettivo successo in avvenire dei principî affermati, e quindi ad es. la effettiva costruzione di sistemi matematici fecondi di problemi e di risultati basati su diverse logiche, varrà in definitiva a far accogliere largamente nel mondo matematico tali principî. Nessuno vuol certo imporre limiti di carattere aprioristico o dogmatico alla più ampia libertà di ricerca. La storia delle matematiche ha finito sempre col dare torto a quanti simili vincoli hanno voluto ad ogni costo affermare: basti pensare alla geometria non euclidea, al meccanismo in fisica, al metodo assiomatico, al postulato di Zermelo. Anche nella storia della matematica il successo finisce col diventare legge. Sembra tuttavia a chi scrive — e chi scrive ha avuto occasione, aderendo ad un gentile invito del fiorente Centro di studî metodologici di Torino, di dibattere tali idee con molti degli autori delle conferenze raccolte nel volume in esame — che la visione della matematica, quale risulta da quanto precede, valga a definire questa scienza sotto il solo aspetto logico, mentre, nell'effettivo sviluppo delle matematiche, intervengono di fatto anche fattori extra-logici, come i problemi che sono sul tappeto in un dato momento, il livello raggiunto dagli studî, la raffinatezza critica acquisita attraverso esperienze talvolta di durata secolare, per non parlare della mentalità dei singoli ricercatori in quanto uomini, e simili. Si dirà che tali fattori sono estranei alla matematica nella sua essenza; e si potrà anche essere d'accordo su ciò. Ma così la questione non si sposta: l'essenziale è che tali fattori appaiano, almeno sino ad esperienze in contrario, come ineliminabili. Gli stessi autori del volume sembrano avere coscienza di questa situazione: Dice il GEYMONAT: « Tutti sanno per es. che l'analisi infinitesimale ha potuto sorgere nel '600 e compiere i suoi mirabili progressi nel '700, proprio perchè le esigenze di rigore furono messe da parte, e i dubbi considerati inutili e nocivi »; e più oltre: « Tutti sanno che le ricerche critiche sui fondamenti della geometria non sorsero da una visione logicamente esatta sulla natura e sul valore dei postulati, ma anzi dalla fede infantile di poter fornire maggiore evidenza al grande edificio eretto da Euclide ». Sono affermazioni, che conservano tutto il loro valore, anche se subito dopo si tende a temperare tale valore con un avversativo« ma », col quale si avverte che (fede ingenua e mancanza di rigore) « hanno anche favorito dibattiti e controversie dimostratisi poi inutili e assolutamente improduttivi ». Ma non saremo per caso noi, inconsapevolmente, rispetto ad altre questioni e problemi, in situazione analoga a quella dei matematici del '600 e del '700? E non sarà la nostra attuale possibilità di presunta completa spregiudicatezza una conseguenza anche delle passate controversie, ora giudicate inutili ed improduttive? Rafforzino dunque i matematici la loro opera in piena libertà in tutte le possibili direzioni, continuino essi il loro lavoro accompagnandolo da una continua critica nella ricerca di liberarsi da tutti i pregiudizî che inavvertitamente si possano essere insinuati nella loro attività, ma si lasci anche libero corso a tutti i motivi logici ed extra-logici, che ognora hanno comunque favorito lo sviluppo della nostra scienza. Se è vero, come hà detto il CARNAP, che « In der Logik gibt es keine Moral » è pur vero che il matematico ha una sua morale, che è quella del sentimento sempre rinnovantesi della imperfezione e della incompletezza dell'opera sua: sarà anche questo un motivo extra-logico ed extra-matematico, ma appunto uno dei motivi che più di ogni altro hanno promosso il progredire della nostra scienza nella sua luminosa storia.

FABIO CONFORTO

PROCLUS DE LYCIE: *Les Commentaires sur le Premier Livre des éléments*. Tradui pour la prémièe fois du Grec en Français, avec uue Introduction et des Notes, pur PAUL VER EECK. Bruges, Desclée de Broower et C.ie, 1948, 8°, p· XXIV-372.

PROCLO è il più noto dei componenti la setta dei Rinnovatori del Platonismo. Egli nacque a Bisanzio il 9 Febbraio del 412 e morì ad Atene il 17 Aprile del 486. È designato come Licio per essere i suoi genitori nati a Zante in Licia: mentre l'epiteto di « successore » (diadoco) spesso allegato al suo nome serve a ricordare che, come capo della Scuola d'Atene, prese il posto del suo maestro Siriano. Marino da Neapoli, suo entusiasta biografo, gli attribuisce le quattro virtù che, secondo i Pitagorici, costituiscono la saggezza, cioè coraggio, giustizia, temperanza e prudenza, nonchè le tre doti fisiche che caratterizzano l'eccellenza dei sensi, salute, forza e bellezza.

Come matematico appartiene al cosidetto periodo argenteo della scienza Greca, cioè all'epoca in cui erano da tempo scomparsi quei grandi che foggiarono il pensiero scientifico quale tutti conoscono perchè è tuttora quello che informa e governa il pensiero scientifico da non meno di venti secoli; in seguito non s'incontano che pallidi ed anemici commentatori: fra essi trovasi Proclo.

La produzione di Proclo è estremamente abbondante e svariata; avendo avuta amica la sorte, essa si è miracolosamente sottratta alla distruzione di cui furono vittima tante opere grandi e piccine dell'antichità: quella che gode di maggiore notorietà è appunto quella soggetto della presente recensione. Benchè tutta inspirata alle idee di Platone, l'autore si mostra pienamente al corrente delle idee degli altri filosofi Greci. La sua notevole importanza proviene dall'essere l'unica sicura base per la storia della geometria Greca; vi si trova un prezioso elenco dei matematici Greci anteriori ad Euclide e di più in tutta l'opera sono sparse notizie intorno ad opere che si considerano ormai definitivamente perdute, nonchè di pensatori mediocri di cui altrimenti non si conoscerebbe nemmeno il nome. Si sarrebbe tentati di supperre che l'opera di Proclo risulti da lezioni tenute ad Atene; se non che egli più volte, per meglio chiarire il pensiero di Euclide, ricorre a nozioni, che, almeno secondo le direttive didattiche moderne, i suoi ascoltatori avrebbero appreso più tardi nel corso dei loro studi.

L'opera di Proclo consta di un esteso Prologo diviso in due parti, la prima esenzialmente filosofica e la seconda di carattere storico; seguono tre Capitoli contenenti per ordine i commenti alle Definizioni di Euclide, ai Postulati ed assiomi, e da ultimo alle Proposizioni.

Dalla I parte del Proemio si apprende che secondo Pitagora quattro sono le discipline costituenti la matematica, cioè Aritmetica, Geometria, Astronomia e Musica, sono quelle che, sotto il nome di « quadrivio », costituirono durante l'intero Medio-Evo, il fondàmento dell'istruzione della gioventù, secondo Aristotele, su tutte sovrasta la Dialettica. Al dire di Eudemo da Rodi un'altra classificazione esisteva della matematica, come risulta da un'opera perduta da secoli e nota a Proclo attraverso ad un commento fattone da Gemino. Gli è nella II parte del Prologo che Proclo presenta l'elenco di matematici Greci anteriori ad Euclide, già da noi ricordato, non senza far noto che per tradizione la Geometria ebbe origine in Egitto per la necessità di ripristinare i confini delle varie proprietà cancellate dalle periodiche innondazioni del Nilo, aggiungendo l'osservazione che non ci si deve meravigliare se una scienza indipendente dalla realtà sia stata prodotta da un interesse umano, dal momento che « tutto quello che nasce dalla generazione procede dall'imperfetto al perfetto »; aggiungendo che similmente l'Aritmetica nacque fra i Fenici a causa del commercio a cui essi consacravansi con costante impegno (1). Però, lo osserva Aristtele, nulla esclude che alle stesse scienze siasi giunti battendo altre vie.

Esaurite queste generalità, il nostro autore intraprende il vero e proprio commento di quanto scrisse Euclide, cominciando dalle Definizioni. Giova rilevare che egli non fa alcun cenno della possibilità, verso la quale inclinasi oggi, che le Definizioni (e così gli Assiomi ed i Postulati) abbiano subiti mutamenti di sostanza e di ordinamento da parte di imperiti ed irrispettosi raffazzanotari degli *Elementi*. Proclo non manco poi d'invitare il lettore ad ammirare gli artifici logici usati dal grande maestro, i quali, pur nella loro varietà, possiedono tutti una incofutabile energia probatoria.

Secondo lui fra assiomi e postulati passa la stessa differenza che corre fra teorema e problema. Il numero delle proposizioni assunte da Euclide senza dimostrazione fu da alcuni autori aumentate e diminuite da altri; Proclo non condivide questi modi di vedere, dimostrando che tutte intervengono nelle dimostra-

(1) Le storie delle matematiche non contengono alcun cenno sopra i Fenici, mancando totalmente documenti su cui fondarsi.

zioni e di nessuna altra si avverte il bisogno; ricordando anche l'esistenza di matematici (fra cui lo stesso Apollonio Pergeo) che si accinsero a dimostrarne alcune.

Furono anche elevate delle critiche contro la distinazione fra teoremi e problemi, alcuni matematici ritenendo che tutte le proposizioni della geometria appartengono alla prima specie ed altri alla seconda; il nostro commentatore dà ragione del perchè egli non condivida nè l'una nè l'altra di queste opinioni. Altre pregevoli osservazioni Proclo espone riguardo alle Definizioni; oltre ad occuparsi di quelle scelte dal suo autore, egli ne riferisce altre che furono proposte. Così riguardo al « punto » egli ricorda quella dei Pitagorici, secondo cui il punto è l'unità avente posizione (2). Parlando della retta egli ne riferisce alcune definizioni differenti da quella euclidea; ma a questo riguardo commette un errore che, per sua colpa si diffuse attraverso i secoli, attribuendo ad Archimede la definizione di retta come cammino minimo, mentre il sommo Siracusano, nella sua opera *Sopra la sfera ed il cilindro* assume come « postulato » che di tutte le linee contermini, la retta è minima. Riguardo alle parallele egli cita anche la definizione come rette equidistanti, spesso adottata anche da trattatisti moderni. Da ricordare anche quanto egli dice riguardo all'angolo cornicolare (cioè formato da una circonferenza con la sua tangente in un punto) che fu oggetto di discussioni e ricerche a partire dal Rinascimento.

I commenti di Proclo alle proposizioni di Euclide sono meno particolareggiati di quelli riferentesi alla parte introduttoria degli *Elementi*, il che si spiega data la natura della materia. A ragione egli considera il I Libro degli *Elementi*, come costituito da due sezioni, la prima comprendendo quanto è indipendente dalla nozione di parallele (Prop. I-XXVI), e la seconda quella in cui è applicato tale concetto. Da notare che le soluzioni date da Euclide per i problemi non sono sempre quelle « graficamente » più semplici, ma lo sono dal punto di vista dei teoremi applicati (3). Riguardo alle dimostrazini egli rileva che sono sempre applicati i canoni fondamentali della logica aristotelica, cosicchè i soli scettici, o Pironiani, non ne accettarono le conclusioni. È noto che Euclide non espose quanto sapevasi ai suoi tempi di geometria (si pensi, ad esempio, alle lunole di Ippocrate); Proclo aggiunge del suo qualche proposizione; p. es. egli cita il teorema secondo cui « se un segmento rettilineo scorre coi suoi estremi sopra due rette fra loro perpendicolari, il suo punto medio descrive un cerchio e tutti gli altri delle ellissi »; inoltre, dopo avere ricordata l'esistenza di triangoli rettangoli con l'ipotenusa irrazionale, insegna i metodi di Pitagora e di Platone per costruire dei triangoli rettangoli con tutti i lati razionali.

Quale è lo scopo che si prefisse Euclide componendo gli *Elementi?* Secondo il nostro commentatore consiste nel giungere alla costruzione delle figure cosmiche (poliedri regolari); opinione non condivisa da coloro che ritengano essere un trattato scolastico fine a sè stesso. Proclo più volte accenna al proposito di commentare *tutti* i tredici Libri costituenti gli *Elementi*. Ma, giunto al termine della sua fatica, riconosce che a tanto non sono sufficienti le sue forze, e fa

(2) Siasi lecito osservare che questa definizione non si trova in alcuna opera moderna; tuttavia, quando in geometria analitica noi designamo un punto con la scrittura P (x,y), che cosa facciamo se non considerare un ente puenamente determinato dalla qualità di avere una posizione?

(3) Questa distinzione fra semplicità teorica e semplicità grafica si trova implicitamente a base della Geometrografia; sarebbe il caso di farne esplicitamente menzione nei libri di testo per le scuole.

voti che altri prenda il suo posto, cosa che, a quanto ci consta, non è accaduto, cosa estremamente deplorevole.

Benchè in questo nostro resoconto non si legga tutto quanto avrebbe meritato di essere riferito, pure riteniamo che sia sufficiente a stabilire il valore dell'opera in esame. Essa è molto meno nota di quanto meriterebbe per l'utilità che ne deriverebbe specialmente ai professori di geometria elementare, i quali vi apprenderebbero molti punti di vista che gioverebbero al loro insegnamento. Ad una più soddisfacente diffusione di essa contribuirà indubbiamente l'ottima versione compiuta da ver Eecke; essa per sostanza e per forma è quale potevasi ragionevolmente attendere dall'illustre traduttore delle opere più cospicue dei matematici Greci (Apollonio, Archimede, Pappo, Diofanto); e va esplicitamente rilevato che le difficoltà che egli dovette superare nella presente occasione sono superiori a quelle che egli dovette vincere in quelle precedenti, chè spesso un termine filosofico per essere debitamente tradotto esigere il delicato lavoro di una vera e propria interpretazione. Auguriamo che il pubblico matematico misurando il valore del lavoro compiuto, tributerà all'autore il ben meritato plauso, unico compenso a cui egli ragionevolmente aspira.

GINO LORIA

E. A. MILNE: *Vectorial Mechanics*. - Methuen, London 1948.

È questo un libro che mantiene la promessa data nel titolo. Se vi sono ancora degli studiosi che considerano il metodo vettoriale come un semplice sistema stenografico per scrivere una sola equazione al posto di tre, ciò è in parte colpa dei molti libri pensati scalarmente e scritti vettorialmente. Ci sembra che l'opera del Milne sia una delle più convincenti e suggestive confutazioni di questo errore. In essa infatti il calcolo vettoriale manifesta la sua singolare efficacia, non solo nella dimostrazione di proprietà generali, ma ancor più nella soluzione di problemi particolari concreti. Per la prima volta, come giustamente rileva l'autore, viene mostrata tutta l'enorme potenza del prodotto vettoriale. Esso costituisce il tema fondamentale di decine e decine di esempi sapientemente scelti.

La prima parte del libro è dedicata a un'esposizione del calcolo vettoriale e tensoriale molto più vasta e approfondita di quella degli ordinari trattati di meccanica. In particolare lo studente viene addestrato su una grande quantità di esercizi alla soluzione e alla integrazione diretta delle equazioni vettoriali, rispettivamente algebriche e differenziali. Il capitolo sui teoremi integrali va molto al di là di quanto è strettamente necessario nel seguito del libro, ma pone in forma chiara e completa delle basi quanto mai utili in tutti gli studi di fisica matematica. Le notazioni vettoriali e tensoriali sono scelte in modo veramente felice e ci auguriamo anche noi con l'autore che esse possano contribuire all'unificazione in questo campo. In particolare, contrariamente all'uso di certa letteratura d'oltr'alpe, il prodotto vettoriale viene indicato con $\wedge$ e le parentesi vengono usate soltanto nel loro significato algebrico. Un punto indica il prodotto scalare, o in generale, la saturazione di un indice, due punti la saturazione di due indici, e così via. Di preferenza poi i tensori vengono trattati nel loro significato assoluto, senza bisogno di coordinate, di indici e di sommazioni. Due vettori, scritti l'uno dopo l'altro, come *uv*, indicano una diade. Ne risulta un sistema molto razionale e snello, al quale forse è un peccato che manchi la comodissima notazione $P - O$, dP ecc. (con P e O punti).

Nella seconda parte viene introdotto il concetto di vettore applicato a una retta e viene definita l'equivalenza fra sistemi di tali vettori. Questi sistemi vengono studiati da prima come enti matematici a sè, indipendentemente dall'applicazione alla statica, che viene poi fatta nel corso di questa seconda parte. Si ha così la possibilità di applicarli in seguito tali e quali ai teoremi sulle quantità di moto o sui piccoli spostamenti dei sistemi di particelle.

La terza parte, dedicata alla dinamica, si apre con un capitolo sul moto dei corpi rigidi da cui si ricava in special modo la cinematica rispetto a sistemi di riferimento mobili. In particolare, se d/dt indica la derivata rispetto al tempo calcolata nel sistema fisso e $\partial/\partial t$ quella calcolata nel sistema mobile, essendo Ω la velocità angolare di quest'ultimo, vengono stabilite le due formule fondamentali.

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+\Omega\wedge P, \qquad \frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+\Omega\wedge T-T\wedge\Omega,$$

con P vettore e T tensore generico. Queste formule, di cui la seconda rappresenta una vera e propria innovazione nella meccanica elementare, vengono nel seguito poste a base di una grande quantità di applicazioni. Naturalmente l'impostazione vettoriale rende inutile la considerazione di assi fissi e di assi mobili.

Nella dinamica propriamente detta sono trattati in modo diffuso e spesso elegante tutti i principali problemi classici di moto di punti materiali. Da segnalare per chiarezza ed efficacia la trattazione del punto pesante soggetto a resistenza viscosa, quella del pendolo semplice e quella del moto in prossimità della superficie terrestre rotante. Segue quindi la dinamica dei corpi rigidi, con un capitolo dedicato al calcolo del tensore d'inerzia in moltissimi casi particolari e un altro notevole capitolo sui problemi girostatici. Il libro si chiude con i principali teoremi sul moto impulsivo.

È un peccato che manchino anche i primi elementi di meccanica analitica. Forse l'autore li ha omessi, perchè meno adatti a una trattazione integralmente vettoriale.

Dobbiamo esprimere qualche riserva circa la facile accessibilità del libro agli studenti del secondo o terzo anno ai quali si rivolge. Il tono piuttosto elevato, la grande quantità di materiale (che non di meno è da considerarsi incompleto anche per quanto riguarda classici problemi elementari) e l'ordinamento non abbastanza sistematico, ci sembra richiedano una mentalità già matura ed orientata sugli elementi della meccanica razionale. Riteniamo invece che l'opera del Milne, frutto di più di venti anni (come dichiara l'autore) di riflessione e di critica, possa riuscire molto utile e suggestiva per gli studiosi che questi elementi già posseggono, con la visione di tutte le magnifiche possibilità del calcolo vettoriale.

G. Toraldo di Francia