Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Sbrana

# Su una proprietà degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **4** (1949), n.2, p. 101–103.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

# SEZIONE SCIENTIFICA

## PICCOLE NOTE

### Su una proprietà degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

**Sunto** - *In questa Nota vengono indicate delle semplici condizioni, sufficienti perchè una funzione, continua con le sue derivate dei primi due ordini in un intervallo, sia sviluppabile in una serie di funzioni continue, ortogonali e normali nello stesso intervallo.*

**1.** È noto che si può dimostrare facilmente la sviluppabilità in serie di FOURIER di una funzione $f(x)$ periodica con periodo $2\pi$, con derivata prima e seconda continue [1].

*Consideriamo* più in generale *una successione di funzioni*

$$\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \dots\,,\ \varphi_n(x)\,,\ \dots\,,$$

*continue, ortogonali e normali in* (a, b); *e sia* f(x) *una funzione continua con le sue derivate dei primi due ordini nello stesso intervallo chiuso* $(a, b)$, *con* $a < b$; *se la serie*

$$\sum_1^\infty {}_n\, \varphi_n(x) \int_a^s (s-t)\varphi_n(t)dt$$

*è equiconvergente per* $a \leq s \leq b$, *e* $a + \delta \leq x \leq b - \delta$, *con* $\delta$ *positivo, minore di* $b - a$, *ed è*

$$\sum_1^\infty {}_n\, \varphi(x) \int_a^s (s-t)\varphi_n(t)dt = \begin{cases} s - x, & \text{per } a < x < s \leq b, \\ 0, & \text{per } a \leq s < x < b, \end{cases} \tag{1}$$

[1] Cfr. GUIDO FUBINI, *Lezioni di analisi matematica*, 4ª edizione, p. 444 e seguenti; *Dimostrazione elementare della sviluppabilità in serie di* FOURIER *di alcune funzioni*, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. IV (1935), p. 1 e seguenti.

*e se inoltre*

$$\sum_1^\infty {}_n \varphi_n(x) \int_a^b \varphi_n(t)dt = 1, \quad \text{per} \quad a < x < b, \tag{2}$$

*allora la serie*

$$\sum_1^\infty {}_n a_n \varphi_n(x), \quad \text{con} \quad a_n = \int_a^b f(s)\varphi_n(s)ds\,, \tag{3}$$

*converge, ed ha per somma* f$(x)$, *nell'intervallo aperto* $(a, b)$.

Moltiplichiamo invero i due membri della (1) per $f''(s)ds$, ed integriamo in $(a, b)$. Si trova

$$\sum_1^\infty {}_n \varphi_n(x) \int_a^b f''(s)ds \int_a^s (s-t)\varphi_n(t)dt = \int_x^b (s-x)f''(s)ds. \tag{4}$$

Ma con due successive integrazioni per parti risulta

$$\int_a^b f''(s)ds \int_a^s (s-t)\varphi_n(t)dt = f'(b)\int_a^b (b-t)\varphi_n(t)dt - f(b)\int_a^b \varphi_n(t)dt + \int_a^b f(s)\varphi_n(s)ds\,;$$

ed inoltre

$$\int_x^b (s-x)f''(s)ds = (b-x)f'(b) - f(b) + f(x)\,.$$

Con ciò la (4) diviene

$$f'(b)\sum_1^\infty {}_n \varphi_n(x) \int_a^b (b-t)\varphi_n(t)dt - f(b)\sum_1^\infty {}_n \varphi_n(x)\int_a^b \varphi_n(t)dt + \sum_1^\infty {}_n a_n\varphi_n(x) =$$

$$= (b-x)f'(b) - f(b) + f(x)\,.$$

Tenendo presente la (1) con $s = b$, e la (2), si ottiene

$$\sum_1^\infty {}_n a_n \varphi_n(x) = f(x), \quad \text{per} \quad a < x < b, \qquad \textit{c. v. d.}$$

**2.** Nel caso delle serie di Fourier la condizione (1) diviene

$$\frac{s^2}{4} + \sum_1^\infty {}_n \int_0^s (s-t)\cos n\,(t-x)\,dt = \frac{s^2}{4} + s\sum_1^\infty {}_n \frac{\operatorname{sen} nx}{n} - \tag{5}$$

$$- \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos n(s-x)}{n^2} + \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \pi(s-x), & \text{per} \quad 0 < x < s \leq 2\pi\,, \\ 0\,, & \text{per} \quad 0 \leq s < x < 2\pi\,. \end{cases}$$

Il 1° membro è equiconvergente per $0 \leq s \leq 2\pi$, e $\delta \leq x \leq$ $\leq 2\pi - \delta$, con $\delta$ positivo (minore di $2\pi$). È poi noto che

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{\operatorname{sen} nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \text{per} \quad 0 < x < 2\pi\,,$$

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,,$$

e quindi

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{\cos n(s-x)}{n^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi}{2}(s-x) + \dfrac{(s-x)^2}{4}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq s \leq 2\pi, \\ \dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{\pi}{2}(s-x) + \dfrac{(s-x)^2}{4}, & \text{se} \quad 0 \leq s \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Sostituendo nella (5), si trova che essa è verificata.

Anche la (2) è sodisfatta, poichè si riduce a

$$1 + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \int_0^{2\pi} \cos n(x-t)dt = 1\,.$$

La serie di FOURIER nel caso considerato è equiconvergente in ogni intervallo $(\delta, 2\pi - \delta)$.

**3.** Se nel 1° membro della (5) si pone $x = 0$ ovvero $x = 2\pi$, si ottiene

$$\frac{s^2}{4} + \sum_1^\infty{}_n \int_0^s (s-t)\cos nt\, ds = \frac{s^2}{4} - \sum_1^\infty{}_n \frac{\cos ns}{n^2} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{2}s.$$

Moltiplichiamo i due membri per $f''(s)ds$, e integriamo da zero a $2\pi$. Risulta

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)\,ds + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \int_0^{2\pi} f(s)\cos ns\, ds = \frac{1}{2}[f(o) + f(2\pi)].$$

Questa osservazione suggerisce un'indagine analoga per lo studio del comportamento della serie generica (3) agli estremi dell'intervallo $(a, b)$.

Il procedimento può essere utilmente impiegato per le serie di polinomi di LEGENDRE [1].

[1] Della proprietà indicata non ho trovato traccia nei noti trattati di A. ZYGMUND, *Trigonometrical series,* (1935); S. KACZMARZ und H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen,* (1935); G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale,* seconda edizione, Parte II, G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali* (1946).