BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

F. MARCUS

Un teorema di geometria differenziale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 109–111.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Un teorema di geometria differenziale.

Nota di F. MARCUS (a Botosani).

Sunto. - *L' A. dimostra che: quando le linee di curvatura di due superficie* S_1 *e* S_2 *in corrispondenza biunivoca si corrispondono, se la retta determinata da due punti corrispondenti è normale ad una superficie, essa è normale anche alla seconda, escluso il caso delle superficie modanate.*

Siano x_i, y_i, $z_i (i = 1, 2)$ le coordinate cartesiane ortogonali (funzioni finite e continue di u, v) di due punti, che al variare dei parametri, descrivono due superficie S_1 e S_2, in corrispondenza biunivoca (¹).

Vogliamo dimostrare che:

Quando le linee di curvatura di due superficie S_1 *e* S_2 *in corrispondenza biunivoca si corrispondono, se la retta determinata da due punti corrispondenti è normale ad una superficie, essa è normale anche alla seconda, escluso il caso delle superficie modanale (moulures).*

Infatti, prendiamo come linee coordinate il sistema delle linee di curvatura, che supponiamo corrispondersi sulle due superficie. Considerando in ogni punto della superficie S_1, ad esempio, il

(⁷) In due Note pubblicate nell'Accademia d'Italia (1935 e 1936) è stato approfondito lo studio contenuto nella Memoria del Circolo matematico di Palermo, citata in (³), e nella prima di esse sono stati determinati i ρ corpi divisori del corpo di GALOIS delle equazioni $f(x) = 0$, di grado $n = \rho r$, irriducibili, a gruppo G_ν, in ciascuno dei quali si stacca razionalmente un fattore irriducibile, di grado r, del primo membro dell'equazione, che dà luogo a un'equazione ciclica.

(¹) Punti corrispondenti sono determinati da medesimi valori di u e v.

triedro principale, formato dalle direzioni positive delle tangenti alle linee v ed u e della normale a S_1, indicando con X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$) i rispettivi coseni, si ha (¹)

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = a_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + b_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & F_1 = F_2 = D'_1 = D'_2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} = a_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial u} + b_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & a_i = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_i ; \quad b_i = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_i \end{cases}
$$

$$
(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = - \dfrac{D_1}{E_1} x_{1u} \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = - \dfrac{D_1''}{G_1} x_{1v} . \end{cases}
$$

Per ipotesi abbiamo

$$
(3) \quad x_2 - x_1 = \lambda X_3 ; \quad y_2 - y_1 = \lambda Y_3 : \quad z_2 - z_1 = \lambda Z_3 .
$$

Essendo u, v i parametri sulle linee di curvatura della superficie S_2, $Sx_{2u}x_{2v} = 0$ e tenendo conto delle (2)

$$
(4) \quad \lambda_u \lambda_v = 0.
$$

Dobbiamo ora distinguere i seguenti casi:

1. $\lambda =$ cost. In questo caso, tenendo conto delle (2), si ha

$$
x_{2u} = x_{1u}\left(1 - \frac{\lambda D_1}{E_1}\right),
$$

$$
x_{2v} = x_{1v}\left(1 - \frac{\lambda D_1''}{G_1}\right),
$$

e perciò

$$
(5) \quad SX_3 x_{2u} = SX_3 x_{2v} = 0.
$$

Dunque la normale alla superficie S_1 è anche normale alla superficie S_2.

2. $\lambda = \lambda(v)$. In questo caso dalle (2), (3)

$$
(6) \quad \begin{cases} x_{2u} = x_{1u} \left(1 - \dfrac{\lambda D_1}{E_1}\right) \\ x_{2v} = x_{1v} \left(1 - \dfrac{\lambda D_1''}{G_1}\right) + \lambda_v X_3 . \end{cases}
$$

Dunque la normale alla superficie S_1 non è normale alla superficie S_2. Da $x_{2uv} = x_{2vu}$ tenendo conto delle (1), (2), (6) risulta

$$
(7) \quad b_2 = b_1 = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2 = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 = 0,
$$

(¹) Si veda: L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, parte I, pagg. 170-181.

$$\left(1-\frac{\lambda D_1''}{G_1}\right)_u=0. \tag{8}$$

Dunque $1-\lambda\frac{D_1''}{G_1}=\Phi(v)$, dove $\Phi(v)$ è una funzione arbitraria di v e

$$\frac{\partial G_2}{\partial u}=\frac{\partial G_1}{\partial u}=0. \tag{7_1}$$

Cioè, la curvatura geodetica delle linee di curvatura $u=\text{cost}$ è uguale a zero. Perciò le $u=\text{cost.}$ sulle due superficie sono geodetiche (3), e secondo un risultato ben noto (4), esse sono piane e le superficie sono modanate (5). Similmente si trova nel caso $\lambda=\lambda(u)$: le linee $v=\text{cost.}$ sono geodetiche, le superficie sono modanate.

È così dimostrato il teorema.

Per questi ultimi casi, si pone il problema di determinare l'angolo delle normali alle due superficie S_1 ed S_2.

Consideriamo per esempio il caso $\lambda=\lambda(\ )$. Indichiamo con X, Y, Z i coseni direttori della normale alla superficie S_2. Tenendo conto delle (7_1), si potrà cambiare il parametro v in modo di rendere

$$G_1=1. \tag{9}$$

Ponendo poi

$$X=\alpha x_{1u}+\beta x_{1v}+\gamma X_3, \tag{9_1}$$

osservando che $SXx_{2u}=SXx_{2v}=0$ e ricordando le (6), (9)

$$\alpha=0,\qquad \beta=\frac{-\gamma\lambda v}{1-\lambda D_1''}.$$

Da $SX^2=1$ tenendo conto delle (9), (9_1) segue

$$\beta^2+\gamma^2=1.$$

Perciò

$$\beta=\mp\frac{\lambda_v}{\sqrt{\lambda_v^2+(1-\lambda D_1'')^2}}\quad,\quad \gamma=\frac{1-\lambda D_1''}{\sqrt{\lambda_1^2+(1-\lambda D_1'')^2}}.$$

Indicando con θ l'angolo delle due normali, si ha

$$\operatorname{sen}\theta=\beta\quad \cos\theta=\gamma,$$

e tenendo conto della (8)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\lambda_v}{1-\lambda D_1''}=\Phi(v). \tag{10}$$

Dunque, lungo la linea $v=\text{cost}$, l'angolo delle due normali è costante. Similmente per il caso $\lambda=\lambda(u)$.

Ringrazio il prof. MARIO VILLA per i suggerimenti datimi nel corso del presente lavoro.

(3) L. BIANCHI, op cit., pag. 122 e 267.
(4) L. BIANCHI, op. cit., pag. 296.
(5) L. BIANCHI, op. cit., parte I, vol. II, pag. 510.