Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Pompilj

Sulla significatività delle costanti statistiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 112–117.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_112_0>

Sulla significatività delle costanti statistiche (*)

Nota di GIUSEPPE POMPILJ (a Roma).

Sunto. - *Si segnala il cattivo uso dei procedimenti matematici che è stato fatto in alcuni sviluppi della teoria della significatività, i quali hanno trovato ampio credito presso varie branche della Scienza. Dato il grandissimo interesse scientifico dei problemi, si propone che, in occasione di un prossimo congresso, venga organizzato un ampio dibattito sull'argomento.*

Circa dieci anni fa, nel discorso inaugurale della prima riunione scientifica della Società Italiana di Statistica, C. GINI (1) denunciava gli errori logici che minano, fin dalle fondamenta, tante teorie statistiche della significatività, le quali avevano trovato, specialmente negli ambienti anglo-americani, numerosi seguaci. Da allora l'eminente statistico è tornato più volte su questo argomento attraverso numerosissime memorie che sarebbe qui troppo lungo elencare (2).

Ma i tentativi isolati che si sono avuti nel continente europeo di sostener le suddette teorie, e più ancora la ridicola congiura del silenzio, impostata oltre Manica e oltre Atlantico, dimostrano che ancora non si è capito il profondo significato delle critiche in questione.

Al fondo di tali errori vi è un abuso o cattivo uso della matematica che non può certo lasciare indifferenti i matematici, i quali di tale disciplina sono, in un certo senso, i custodi; motivo per cui ho creduto opportuno portare la questione di fronte a questa assemblea, sia per richiamare l'attenzione sull'argomento, sia sopratutto, data la vastità e l'interesse dei problemi che ne vengono coinvolti, per prospettare la convenienza che esso sia posto all'ordine del giorno in un prossimo congresso nazionale o internazionale di matematica.

E la presente comunicazione vuole appunto offrire una rapida visione di alcuni di questi abusi; rapida, sia perchè la strettezza del tempo a disposizione non consente un'analisi più particolareg-

(*) Comunicazione svolta il 24-9-48 al III° Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(1) Ved.: C. GINI: *I pericoli della statistica.* Atti della prima riunione scientifica della Società Italiana di Statistica, 1939.

(2) Una rielaborazione di tali indagini si trova in C. GINI: *Intorno alle basi logiche e alla portata gnoseologica del metodo statistico.* Statistica, 1946.

giata, sia perchè in altri lavori [3] ho già trattato più diffusamente questi argomenti.

1. Il problema della significatività delle costanti statistiche assume in realtà molti aspetti diversi, ma i più notevoli sono solo i tre seguenti:

I. risalire da un parametro calcolato mediante un campione al valore che il parametro stesso assume per la massa;

II. valutare fino a che punto certe divergenze sperimentali siano puramente dovute al caso, oppure rivelino delle differenze sistematiche;

III. determinare se certe misure medie siano affette da errori accidentali, oppure tendano ad esprimere l'effettiva intensità del carattere che si vuol misurare.

Il primo aspetto del problema, nel suo caso più semplice, può essere impostato nel modo seguente.

Si abbia una collezione di masse a ciascuna delle quali compete un valore x di un certo parametro $\mathfrak{X}$ (per esempio: media, varianza, differenza media, ...); e sia $\varphi(x)\,dx$ la probabilità di scegliere una massa che abbia un valore del prefissato parametro compreso tra x e $x + dx$.

Fissata poi una particolare massa, cui compete il valore x del parametro, se ne estragga un campione e si calcoli su esso il carattere stesso, che indicherò con $\mathfrak{Y}$, ottenendo così un valore y, generalmente diverso da x.

Supponiamo inoltre che le nostre conoscenze sulla collezione di masse permettano di esprimere la probabilità che un valore di $\mathfrak{Y}$ sia compreso tra y e $y + dy$ solo in funzione di x, y (e dy), cioè con un'espressione del tipo:

$$\gamma(y \mid x)dy.$$

Se ora domandiamo, conoscendo il valore y del parametro $\mathfrak{Y}$ calcolato mediante un campione, qual'è la probabilità con cui esso campione può provenire da una massa il cui carattere $\mathfrak{X}$ è compreso tra x e $x + dx$, non possiamo trovare ovviamente risposta diversa da quella offerta dalla formula seguente:

$$\frac{\varphi(x)\gamma(y \mid x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\gamma(y \mid x)dx}\,dx,$$

(3) Ved.: G. POMPILJ: *Sulla media di una distribuzione normale.* Statistica, 1947; e: *Teorie statistiche della significatività e conformità dei risultati sperimentali agli schemi teorici.* Statistica, 1948.

da cui risulta in modo indiscutibile e lampante che la sola conoscenza della $\gamma(y \mid x)$ non permette di rispondere al quesito, come invece molti tentano di fare [4] non tenendo presente che la soluzione dipende in modo essenziale anche dalla funzione $\varphi(x)$.

E questo dovrebbe bastare per chiarire in modo definitivo la cosa.

Ma, come ho già detto, non basta perchè a queste lapalissiane osservazioni si contrappongono dei sofismi algoritmici nei cui labirinti, a quanto pare, si sono persi tanti studiosi, che evidentemente non avevano a disposizione il filo d'Arianna di un'autocritica spassionata.

Tali sofismi sono di varia natura, ma tra essi uno primeggia e appunto questo voglio qui discutere limitandomi ad un problema particolare.

2. Ecco il problema. Da una certa urna contenente palline bianche e nere in proporzione incognita, si sono estratte bernoullianamente N palline tra cui le bianche si sono presentate con una frequenza relativa f; si vuol determinare un'intervallo, relativamente piccolo, entro cui cada, con pratica certezza, la probabilità incognita p di estrarre pallina bianca dall'urna.

Dopo quanto si è detto al numero precedente è fuori discussione che il problema è privo di senso e che di conseguenza non ammette soluzione.

Tuttavia, ricalcando la falsariga di S. MILLOTT [5], molti ragionano così: se p è la probabilità di estrarre palla bianca dall'urna, il calcolo delle probabilità insegna che la frequenza incognita f soddisfa alla diseguaglianza:

$$(1) \qquad p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \leq f \leq p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

con probabilità circa eguale a 0,997; ma dalla (1), con semplici passaggi analitici, si ottiene:

$$(2) \qquad \frac{2Nf + 9 - \sqrt{(2Nf+9)^2 - 4N(N+9)f^2}}{2(N+9)} \leq$$

$$\leq p \leq \frac{2Nf + 9 + \sqrt{(2Nf+9)^2 - 4N(N+9)f^2}}{2(N+9)}$$

la quale, dicono essi, risolve il problema proposto!

[4] Cito tra gli altri: K. PEARSON, R. A. FISHER, W. S. GOSSET, J. NEYMAN, E. S. PEARSON, le cui teorie si trovano per esempio esposte nel trattato di M. G. KENDALL: *The advanced theory of statistic*, v. II, Griffin - Londra, 1946.

[5] Ved.: S. MILLOT: *Sur la probabilité a posteriori*, comp rendues hebd. des séances de l'Ac. des Sc. Paris, 1923.

Ma è chiaro che quest'ultima formula non è altro che un modo diverso di scrivere la (1), di modo che, anche in essa, p rimane sempre la probabilità *nota* ed f la frequenza *incognita*.

È questo uno strano equivoco in cui si può anche cadere, errare umanum est!, ma in cui, dopo le osservazioni di C. GINI [6], non è più lecito perseverare.

Tale errore trova le sue radici profonde, come ha fatto osservare C. GINI [7], nella classica *Ars conjectandi* di GIACOMO BERNOULLI il quale aveva creduto di trovare nel suo celebre teorema una risposta alla questione che effettivamente lo interessava di risalire dalla frequenza alla probabilità [8].

3. Anche il problema di decider se certe divergenze siano dovute al caso oppur no, si può riattaccare ad uno schema assai simile a quello sopra trattato; di modo che non ritengo necessario, in questa rapida esposizione soffermarmi anche sopra quest' altro aspetto della questione.

Voglio però fare osservare come gli argomenti fin quì trattati abbiano una fortissima ripercussione su tutte le scienze sperimentali; infatti ad argomentazioni analoghe a quelle qui criticate si ricorre, purtroppo, assai spesso, quando si tenta di provare l'efficacia di un nuovo metodo di cura, la potenza di un fertilizzante, o, più in generale, l'influenza di certi fattori biologici o fisici, economici o chimici o morali.

4. Un'altra serie d' equivoci, e tocco così il terzo aspetto del problema, trova le sue radici nell' opera di GAUSS, il quale ha fondato la sua celebre teoria degli errori d' osservazione su certe ipotesi che, secondo una felice frase di LIPPMANN, i matematici

(6) Ved.: C. GINI: *I testi di significatività.* Atti della settima riunione scientifica della Società Italiana di Statistica, 1943; *Ueber statistische Beziehungen und deren Inversion.* Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 1947; *Ueber die Inversion der statistischen Beziehungen.* Ibidem, 1948.

(7) Per la distinzione tra inversione analitica e inversione statistica ved. i lavori in lingua tedesca di C. GINI cit. (6).

(8) Ma vi è di più: su tale errore poggiano tanti tentativi di chiarire il contenuto del concetto di probabilità, che invece è stato messo a fuoco da C. GINI nella memoria *Concept et misure de la probabilité.* Dialectica, 1948, ove appunto viene precisata la necessità di distinguere tra « misura » e « definizione » di probabilità, riconoscendo che la definizione usuale (rapporto tra numero dei casi favorevoli e il numero dei casi egualmente possibili) fornisce invece la misura della probabilità, mentre l' intimo significato del concetto stesso va ricercato nella così detta « frequenza totalitaria ».

accettano perchè le ritengono controllate sperimentalmente dai fisici, mentre questi le credono dimostrate teoricamente dai matematici.

Tale è, per esempio, l'ipotesi che la media degli errori accidentali sia nulla, che GAUSS introduce in modo esplicito come postulato, e che alcuni studiosi ritengono invece matematicamente dimostrata, non tenendo conto del fatto, che, per esempio, nel classico trattato di G. CASTELNUOVO (9) viene detto esplicitamente che si tratta di « un principio dubbio e vago » e non già di un teorema.

D'altra parte è evidente che il postulato di GAUSS non può essere vero che in certi casi particolari. Si chiamano infatti « errori accidentali » quelli che dipendono da circostanze perturbatrici essenzialmente fortuite che si verificano nei due sensi e tendono a compensarsi col crescere del numero delle osservazioni; ed è lampante, come ha fatto già osservare C. GINI (10), che da questa definizione non discende affatto che tendano a compensarsi non solo le anzidette cause ma pure gli errori che ne derivano, anche se si aggiunge l'ipotesi che la distribuzione degli errori stessi sia normale. D'altra parte non si può dare una definizione meno ampia degli errori accidentali se si vuole che la loro accidentalità non dipenda dal metodo usato per misurarli e che le loro combinazioni accidentali diano ancora luogo ad errori accidentali.

La cosa, come ho detto, è ovvia; tuttavia voglio qui fornire due esempi concreti di cause accidentali che, pur compensandosi di per se stesse, danno luogo ad errori che non si compensano.

Primo esempio. – Si voglia deteminare l'area di un quadrato misurandone un lato ed elevando tale misura alla seconda potenza.

Supponiamo pure che le varie misure del lato del quadrato siano affette da errori accidentali che seguono la legge di GAUSS; non altrettanto si potrà evidentemente dire degli errori nella misura della superficie del quadrato; infatti se il lato ha lunghezza m. 5 e la varianza degli errori è m^2. 0,5, la media di un grandissimo numero di misure dell'area, ottenute con tale procedimento, sarà circa $25 + 0,5 \, (> 25)$.

Secondo esempio. – Si voglia determinare l'indice cefalitico di

(9) Ved.: G. CASTELNUOVO: *Calcolo delle probabilità.* V. II, p. 11, Zanichelli - Bologna, 1928.

(10) Ved.: C. GINI: *Il principio della compensazione degli errori accidentali* Atti del secondo congresso dell'U. M. I., 1940; e: *Alle basi del metodo statistico. Il principio della compensazione degli errori accidentali e la legge dei grandi numeri.* Metron, 1941.

un cranio misurando separatamente la lunghezza dei due diametri traverso e longitudinale, facendone il quoziente e moltiplicando per 100.

Supponiamo che le due misure siano affette da errori che seguono la legge di GAUSS; non altrettanto si può allora dire delle varie misure così ottenute dell'indice cefalitico; infatti se la lunghezza dei due diametri è cm. 14 e cm. 16 e se gli errori nella misura del diametro longitudinale hanno una varianza di cm. 1, la media di un gran numero di queste misure dell'indice cefalitico è approsimativamente

$$87{,}87 > 87{,}5 \left(= 100 \cdot \frac{14}{16}\right).$$

Voglio ancora aggiungere che i dubbi che così sono stati gettati sulle applicazioni indiscriminate della teoria degli errori d'osservazione, quale è stata sviluppata da GAUSS, investono gravemente tutte le scienze sperimentali e in modo particolare la Fisica, perchè si è trovato comodo adagiarsi tranquillamente sulla morbida poltrona di tale teoria, fondando su essa anche le così dette «definizioni operative» che pure vanno per la maggiore ([11]).

Come si vede l'argomento è di somma importanza per tutte le scienze sperimentali e quindi anche per la matematica che è della Scienza, storicamente, l'antesignana; ed è perciò desiderabile che in occasione di un prossimo congresso venga promossa un'ampia discussione sul problema della significatività delle costanti statistiche, chiamando a prender parte alla discussione stessa non solo i matematici e gli statistici, ma anche i cultori delle scienze fisiche, chimiche, biologiche, economiche, demografiche, ecc. ecc.