Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Sull'equazione del calore

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 117–121.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sull'equazione del calore.

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna) (*).

Sunto. - *Si dimostra l'esistenza di funzioni, aventi proprietà analoghe a quelle degli ordinari potenziali, che danno soluzioni dell'equazione della propagazione del calore in un corpo isotropo omogeneo. Si accenna poi ai problemi al contorno e all'esistenza della soluzione, sotto un nuovo particolare aspetto.*

In questa Nota dimostro anzitutto, in modo più semplice, una proposizione del BELTRAMI secondo la quale una particolare funzione da lui considerata, e analoga al potenziale di volume, sod-

(11) Su questa interessantissima questione ved.: F SEVERI: « La Scienza e le soglie del mistero » Editrice « Studium Christi » - Roma, 1948.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

disfa all'equazione della propagazione in un mezzo isostropo omogeneo. Dimostro poi l'esistenza di altre due funzioni aventi proprietà analoghe a quelle dei potenziali ordinari di semplice strato e di doppio strato e che danno pure soluzioni della stessa equazione del calore. Se poi di un dato problema tridimensionale di propagazione del calore sono assegnati valori al contorno per la temperatura, la funzione che ha proprietà analoghe a quelle di un potenziale di doppio strato, ne dà certamente la soluzione nell'ipotesi che i valori assegnati siano esprimibili mediante un'espressione che le proprietà dimostrate portano a stabilire.

1. Consideriamo l'equazione di FOURIER della conduzione del calore in un corpo isotropo omogeneo:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

nella quale $u(P, t)$ è la temperatura, all'istante t, nel generico punto P del mezzo. Si ha la seguente proposizione del BELTRAMI [1]:

Se P *ed* M *sono due punti qualsiasi di uno spazio ordinario, la distanza dei quali sia* r, *e* $\psi(\mathrm{r}, \mathrm{t})$ *è una funzione monodroma, continua e finita di* r, *insieme alle sue derivate, anche per* $\mathrm{r} = 0$; *e inoltre* $\psi(\mathrm{r}, \mathrm{t})$ *è nulla per* $\mathrm{r} = 0$ *e soddisfa all'equazione:*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{2}$$

la funzione:

$$U(P, t) = \iiint\limits_{(S)} \frac{k(M)\psi(r, t)}{r}\, dS, \tag{I}$$

nella quale (S) *è un dominio dello spazio, luogo dei punti* M *e* k(M) *è una funzione monodroma, continua e finita di* M, *soddisfa all'equazione* (1).

Ed invero osserviamo che è

$$U(P, t) = \iiint\limits_{(S)} k(M)\frac{\psi(r, t) - \psi(0, t)}{r}\, dS - \iiint\limits_{(S)} \frac{k(M)\psi(0, t)}{r}\, dS$$

e che per le ipotesi fatte la funzione sotto il segno di integrale del primo termine del secondo membro rimane finita anche per $r = 0$; onde, per calcolare $\Delta_P U$, in tale termine possiamo applicare il la-

(1) E. BELTRAMI, *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore*, « Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna ». s. IV, t. VIII, 1887, pagg. 291-326; oppure « Opere ». t. IV, pagg. 270-299.

placiano alla funzione sotto il segno. Essendo:

$$\Delta_P \frac{\psi(r, t)}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \qquad \psi(0, t)\Delta_P \frac{1}{r} = 0,$$

e tenendo presente il teorema di POISSON si ricava

$$\Delta U = -4\pi k(P)\psi(0, t) + \iiint\limits_{(S)} \frac{k(M)}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\, dS.$$

Tenendo poi conto anche della (2) risulta subito:

$$\Delta U = \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

2. *Il teorema precedente sussiste anche per la funzione:*

$$\text{(II)} \qquad V(P, t) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{k(M)\psi(r, t)}{r}\, d\sigma,$$

nella quale (σ) *è una superficie qualsiasi, luogo dei punti* M. In questo caso non occorre aggiungere la condizione che sia $\psi(0, t) = 0$.

Ed invero, poichè per calcolare ΔV si può senz' altro applicare l' operatore Δ sotto il segno d' integrazione, si ottiene subito:

$$\Delta V = \frac{1}{a^2}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Il gradiente della funzione V(P, t), *è discontinuo attraverso la superficie* (σ). Per stabilire ciò osserviamo che è:

$$\text{(3)} \qquad V(P, t) = \zeta(P, t) + V^*(P, t)$$

con

$$\zeta(P, t) = \iint\limits_{(\sigma)} k(M)\frac{\psi(r, t) - \psi(0, t)}{r}\, d\sigma$$

$$V^*(P, t) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{k(M)\psi(0, t)}{r}\, d\sigma.$$

Poichè si dimostra subito che grad $\zeta(P, t)$ è finito e continuo attraverso la superficie (σ), consegue per la (3) che la funzione $V(P, t)$ e il suo gradiente hanno gli stessi caratteri di continuità e di discontinuità del potenziale ordinario di semplice strato $V^*(P, t)$. Pertanto la funzione $V(P, t)$ è continua attraverso (σ), mentre il suo gradiente, attraverso (σ), è discontinuo; e per esso, in un generico punto M' di (σ), si ha:

$$[\text{grad } V(P, t)]_\sigma = -4\pi k(M')\psi(0, t)\boldsymbol{n},$$

nella quale $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a (σ) nel punto M', opportunamente orientato.

Osserviamo che per la (3) è:

$$\operatorname{grad} V = \operatorname{grad} \zeta + \operatorname{grad} V^*.$$

Distinguiamo con gli indici (1) e (2) le due facce della superficie (σ) ed, in corrispondenza, indichiamo con gli indici (1) e (2) i valori limiti dei vettori della relazione precedente quando il punto variabile P tende ad un punto M' di (σ), rispettivamente dalla banda della faccia (1) o dalla banda della faccia (2). Si può allora scrivere:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}[(\operatorname{grad} V)_1 + (\operatorname{grad} V)_2] = \frac{1}{2}[(\operatorname{grad} \zeta)_1 + (\operatorname{grad} \zeta)_2] + \\ + \frac{1}{2}[(\operatorname{grad} V^*)_1 + (\operatorname{grad} V^*)_2].$$

Per la continuità di grad ζ attraverso (σ) e per le note proprietà dei potenziali di semplice strato, dalla (4) si ottiene:

$$\frac{1}{2}[(\operatorname{grad} V)_1 + (\operatorname{grad} V)_2] = (\operatorname{grad} V)_{M'}.$$

3. *Lo stesso teorema del Beltrami sussiste anche per la funzione:*

$$(\mathrm{III}) \qquad W(P, t) = \iint_{(\sigma)} k(M) \operatorname{grad}_P \frac{\psi(r, t)}{r} \times n d\sigma$$

nella quale (σ) *è una superficie qualsiasi, luogo dei punti* M *ed* n *è il versore della normale a* (σ) *nel punto* M *in cui si considera l'elemento* dσ *e lo supponiamo orientato nel senso che va dalla faccia* (1) *alla faccia* (2) *di* (σ). Ciò si dimostra facilmente osservando che per calcolare ΔW si può applicare l'operatore Δ sotto il segno d'integrale e che si ha:

$$\Delta'_P \operatorname{grad}_P \frac{\psi(r, t)}{r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}_P \frac{\psi'(r, t)}{r},$$

nella quale Δ' è il laplaciano per i campi vettoriali.

Osserviamo ora che è:

$$(5) \qquad W(P, t) = \xi(P, t) + W^*(P. t)$$

con:

$$\xi(P, t) = \iint_{(\sigma)} k(M) \left\{ \operatorname{grad}_P \frac{\psi(r, t)}{r} - \psi(0, t) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \right\} \times n d\sigma$$

$$W^*(P, t) = \iint_{(\sigma)} k(M)\psi(0, t) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \times n d\sigma.$$

Si dimostra facilmente che la funzione $\xi(P, t)$ è finita e continua attraverso la superficie (σ), onde si deduce che la discontinuità della funzione $W(P, t)$ attraverso (σ) è la stessa di quella del potenziale ordinario di doppio strato $W^*(P, t)$. In un punto generico M' di (σ) si avrà quindi:

$$W_2(M', t) - W_1(M', t) = 4\pi k(M) \cdot \psi(0, t). \tag{6}$$

nella quale W_1 e W_2 sono i valori limiti di W quando P tende al punto M' di (σ), rispettivamente dalla parte della faccia (1) o dalla parte della faccia (2).

Con un ragionamento analogo a quello fatto al numero precedente, si perviene alla relazione:

$$\frac{1}{2}[W_1(M', t) + W_2(M', t)] = W(M', t), \tag{7}$$

nella quale $W(M', t)$ è il valore di $W(P, t)$ in M'.

4. Nei numeri precedenti si è dimostrato che le funzioni (I), (II), (III), danno soluzioni dell' equazione del calore (1). Riferendoci ora alla funzione (III), dalle (6) e (7), si ricava:

$$W_1(M', t) = -2\pi k(M')\psi(0, t) + \iint_{(\sigma)} k(M)\,\mathrm{grad}_{M'} \frac{\psi(r, t)}{r} \times n\,d\sigma. \tag{8}$$

nella quale M è ancora il punto generico di (σ) dove si considera l' elemento $d\sigma$, M' è un' altro punto generico di (σ) ed è

$$r = \mathrm{mod}\,(M - M').$$

Allorchè sia dato un problema tridimensionale di propagazione del calore in un corpo isotropo omogeneo, con assegnati valori al contorno per la temperatura $W(P, t)$, la funzione (III) ne dà la soluzione nell' ipotesi che sia possibile esprimere i valori assegnati $W_1(M', t)$ della W al contorno mediante un' espressione del tipo (8). È mio proposito di studiare tale possibilità, ossia di studiare la questione d' esistenza della soluzione del problema tridimensionale di propagazione del calore tramite le equazioni integrali, nell' indirizzo sopra indicato.