Aldo Cossu

Trasformazioni conformi in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorni del primo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 122–127.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_122_0>

Trasformazioni conformi in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorni del primo ordine.

Nota di ALDO COSSU (a Bologna) (*).

Sunto. - *Mediante la considerazione delle proiettività caratteristiche di una trasformazione puntuale introdotte dal* VILLA *si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due spazi sia conforme in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorni del primo ordine.*

1. In questa Nota, mediante la considerazione delle proiettività caratteristiche di una trasformazione puntuale introdotte dal VILLA [1], si assegna una condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due piani o spazi euclidei sia conforme in una coppia di punti corrispondenti e nei punti dei loro intorni del I° ordine.

Si determina pure il minimo numero di punti, degli intorni del I° ordine di una coppia regolare di punti corrispondenti nei quali la trasformazione è conforme, affinchè essa lo sia nella coppia considerata ed in tutti i punti dei loro intorni del I° ordine.

Ringrazio il prof. VILLA per avermi suggerito la presente ricerca.

2. Siano $\pi, \bar{\pi}$ due piani euclidei ed $O, \bar{O}$ una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale assegnata fra i due piani. Si può sempre, senza ledere la generalità della questione, con un movimento, sovrapporre i due piani in modo tale che $O \equiv \bar{O}$, e ciascuna delle due rette principali per O coincida con

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna, comunicato nel settembre 1948 al III° Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

[1] M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi,* I *Le proiettività caratteristiche,* II *Loro costruzione,* « Rend dell'Accademia d'Italia », ser. VII, vol. III, p. 718 e vol. IV, p. 1 (1942). Si vedano inoltre i lavori recenti: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra spazi lineari,* I *Intorno del 2° ordine,* II *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci,* III *Trasformazioni cremoniane osculatrici,* « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, pp. 55, 192, 295 (1948).

la corrispondente per $\bar{O}$ ([1]). Assunte queste due rette come assi $x \equiv \bar{x}$, $y \equiv \bar{y}$, i due piani vengono riferiti ad uno stesso sistema cartesiano ortogonale, che supporremo monometrico.

Le equazioni della supposta trasformazione assumono allora nell' intorno della coppia O, $\bar{O}$ la forma

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= ax + \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + [3] \\ \bar{y} &= by + \frac{1}{2}(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) + [3], \end{aligned}$$

ove, come al solito, si sono indicati con [3] i termini di grado ≥ 2.

Si prova che *non esiste, in generale, una coppia di punti corrispondenti, appartenenti agli intorni del primo ordine di* O, $\bar{\text{O}}$ *nei quali la trasformazione è conforme. Ove una tale coppia esista la trasformazione è necessariamente conforme nella coppia* O, $\bar{\text{O}}$ *mentre al contrario, se essa lo è nella coppia* O, $\bar{\text{O}}$ *non lo e, in generale, in una coppia di punti corrispondenti appartenenti agli intorni del I° ordine di* O, $\bar{\text{O}}$.

Sia infatti P $(\xi, \lambda\xi)$ un punto dell' intorno del prim' ordine di O, Affinchè la trasformazione sia conforme in P e nel corrispondente $\bar{P}$ deve aversi proporzionalità fra i quadrati degli elementi lineari corrispondenti uscenti da P e $\bar{P}$, cioè

$$d\bar{s}^2 = \rho ds^2,$$

essendo ρ definito a meno di infinitesimi del secondo ordine rispetto a ξ.

Deve cioè aversi

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} a(a + 2a_{11}\xi + 2a_{12}\lambda\xi) &= b(b + 2b_{12}\xi + 2b_{22}\lambda\xi) \\ a(a_{12}\xi + a_{22}\lambda\xi) + b(b_{11}\xi + b_{12}\lambda\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Dalla prima delle (2) si vede subito che in generale non essendo $a^2 = b^2$ non vi sarà alcun punto $(\xi, \lambda\xi)$ godente della suddetta proprietà; ma se esso esiste, deve necessariamente essere $a^2 = b^2$, e quindi, essendo la proiettività subordinata dalla trasformazione fra i fasci di direzioni per O, $\bar{O}$ una eguaglianza diretta o inversa, la trasformazione risulta conforme nella coppia O, $\bar{O}$.

Viceversa se è $a^2 = b^2$, si deduce subito dalle (2) che, in generale, non esistono punti dell' intorno del I° ordine di O, per i quali la trasformazione è conforme.

([1]) Si veda: E. BOMPIANI, *Caratteri differenziali della trasformazione conforme*, « Rend. di Mat. », ser. V, vol. II, p. 140 (1942).

Dalle (2) segue subito anche che:

Se una trasformazione è conforme in due punti e nei loro corrispondenti degli intorni del I° ordine di $O, \bar{O}$ *allora la trasformazione è conforme non solo in* $O, \bar{O}$, *ma anche in ogni altra coppia di punti corrispondenti degli intorni del I° ordine di* $O, \bar{O}$.

Infatti per quanto si è detto prima deve essere $a^2 = b^2$, non solo, ma dovendo le (2) essere soddisfatte per due valori distinti di λ, devono ridursi a due identità.

Ridotto allora uguale ad 1 il modulo della trasformazione conforme in $O, \bar{O}$, mediante una omotetia di centro $\bar{O}$, si può fare in modo che sia $b = 1$ ed $a = \pm 1$ secondo che l'uguaglianza fra i fasci di direzioni per $O, \bar{O}$ è diretta od inversa.

Le equazioni della trasformazione conforme in tutti i punti corrispondenti degli intorni del I° ordine di $O, \bar{O}$ assumono allora la forma

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varepsilon x + \frac{a}{2}(x^2 - y^2) + [3] \\ \bar{y} &= y + \varepsilon axy + [3], \end{aligned} \tag{3}$$

ove si è assunta la retta caratteristica reale per O come asse x, ed è $\varepsilon = \pm 1$. Le rimanenti rette caratteristiche per O sono le rette isotrope.

La direzione della retta $x = 0$, determinando il punto dell'intorno del I° ordine di O per cui il modulo della trasformazione è ancora uguale ad 1, si chiamerà, col BOMPIANI (3), *direzione di modulo costante.*

3. Le proiettività caratteristiche fra le rette isotrope per O e le corrispondenti per $\bar{O}$ sono subordinate dall'omografia (*omografia caratteristica*) (4)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\varepsilon x}{1 - \varepsilon a x}, \\ \bar{y} &= \frac{y}{1 - \varepsilon a x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Se si considera la corrispondenza tra centri di curvatura di E_2

(3) E. BOMPIANI, op. cit., p. 142.

(4) M. VILLA, la prima delle note lincee cit. p. 58. In particolare per le omografie caratteristiche: M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna », ser. IX, vol. X, p. 12 (1942).

per O ed $\overline{O}$, corrispondentisi nella (3), si ha facilmente che essa è una omografia coincidente con l'omografia caratteristica (4).

Consideriamo viceversa una trasformazione puntuale tra i due piani euclidei $\pi, \overline{\pi}$ e sia $O, \overline{O}$ una coppia regolare di punti corrispondenti; sovrapposti i due piani, come s'è fatto prima (n. 2), affinchè la corrispondenza tra i centri di curvatura di E_2 corrispondenti per $O, \overline{O}$ sia una omografia, basterà imporre la condizione che ad $\overline{E}_2$ per $\overline{O}$, con centri di curvatura su una retta, corrispondano E_2 per O con centri di curvatura godenti della stessa proprietà.

Ciò impone fra i coefficienti delle (1) le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon b, \\ a_{11} - a_{22} - 2\varepsilon b_{12} &= 0, \\ b_{22} - b_{11} - 2\varepsilon a_{12} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Dalla prima delle (7) si deduce subito, come era prevedibile, che la trasformazione risulta conforme nella coppia $O, \overline{O}$. Dalle ultime due si deduce che le rette isotrope per O sono rette caratteristiche, l'ulteriore direzione inflessionale essendo determinata da $\overline{m} = \frac{b_{11}}{a_{22}}$. Ridotto quindi uguale ad 1 il modulo della trasformazione conforme in $O, \overline{O}$ con una omotetia di centro $\overline{O}$, ed assunto come asse x la retta di coefficiente angolare $m = \frac{\varepsilon b_{11}}{a_{22}}$ (si suppone ovviamente $a_{22} \neq 0$), le (1) assumono la forma

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \varepsilon x + \frac{1}{2}\left[a_{11}x^2 + \varepsilon b_{22}xy + a_{22}y^2\right] + [3] \\ \overline{y} &= y + \frac{1}{2}\left[\varepsilon(a_{11} - a_{22})xy + b_{22}y^2\right] + [3]. \end{aligned} \tag{8}$$

L'omografia determinata dai centri di curvatura di E_2 corrispondenti è data allora dalle

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \frac{\varepsilon\alpha}{1 + \varepsilon a_{22}\alpha} \\ \overline{\beta} &= \frac{\beta}{1 + \varepsilon a_{22}\alpha}, \end{aligned} \tag{9}$$

ove con (α, β), $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ si sono denotate rispettivamente le coordinate del centro di curvatura di un generico E_2 per O e dell'$\overline{E}_2$ corrispondente per $\overline{O}$. L'omografia caratteristica determinata dalle proiettività caratteristiche relative alle rette isotrope è invece

$$
(10)\qquad \begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\varepsilon x}{\frac{\varepsilon}{2}(a_{22} - a_{11})x - \frac{b_{22}}{2} y + 1} \\
\bar{y} &= \frac{y}{\frac{\varepsilon}{2}(a_{22} - a_{11})x - \frac{b_{22}}{2} y + 1}.
\end{aligned}
$$

Se le (9) e le (10) coincidono, cioè se $b_{22} = 0$, $a_{11} = -a_{22} = a$, le (8) assumeranno la forma (3).

Si conclude quindi che:

Condizione neces aria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale tra due piani euclidei $\pi, \bar{\pi}$ *sia conforme in una coppia regolare di punti corrispondenti* $O, \bar{O}$ *e nei punti corrispondenti dei loro intorni del primo ordine, è che la corrispondenza tra i centri di curvatura di* E_2 *per* $O, \bar{O}$, *corrispondentisi nella trasformazione, sia l'omografia caratteristica relativa alle rette isotrope inflessionali per* $O, \bar{O}$ (5).

4. Più in generale, con dimostrazione analoga a quella del n. 2, si conclude:

(5) L'omografia (4) determinata dai centri di curvatura di E_2 corrispondenti, nel caso $\varepsilon = -1$, nelle condizioni in cui ci siamo posti, è una omologia armonica avente per asse la retta di *modulo costante* ($x = 0$) e per centro il punto $U\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ sulla retta inflessionale reale per O ($y = 0$). Questo punto è il *punto limite* della $y = 0$ nella proiettività caratteristica relativa a questa retta ed alla corrispondente.

Segue (come ha già rilevato il BOMPIANI, op. cit., p. 145), che gli E_2 per O *congruenti* ai trasformati sono quelli tangenti alla retta inflessionale reale per O e l'E_2 avente per tangente la direzione di modulo costante e per centro di curvatura il punto U.

Si stabilisce pure l'esistenza di altri E_2 per O, i cui centri di curvatura appartengono alla retta pur U parallela alla direzione di modulo costante, ed i cui raggi di curvatura sono eguali a quelli degli E_2 trasformati.

Nel caso invece in cui l'ugualianza tra i fasci di direzioni per $O \equiv \bar{O}$ è diretta ($\varepsilon = 1$), l'omografia tra i centri di curvatura degli E_2 corrispondenti nelle condizioni in cui ci siamo posti, è un'omologia speciale avente per asse la retta $x = 0$ e per centro O. In tal caso si ha ancora che gli E_2 congruenti ai trasformati sono quelli tangenti alla retta $y = 0$ e segue anche che gli E_2, i cui centri di curvatura appartengono alla retta parallela alla direzione di modulo costante, passante per il simmetrico rispetto ad O del punto limite U, hanno raggi di curvatura eguali a quelli degli E_2 trasformati.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale tra due spazi euclidei S_r, $\bar{S}_r$ *sia conforme in una coppia regolare di punti corrispondenti* $O, \bar{O}$ *e in ogni coppia di punti corrispondenti degli intorni del primo ordine di* $O, \bar{O}$, *è che lo sia in* r *coppie di punti corrispondenti, appartenenti agli intorni del I° ordine di* $O, \bar{O}$, *individuati da* r *coppie di direzioni indipendenti rispettivamente per* $O, \bar{O}$.

In una trasformazione puntuale fra S_r, $\bar{S}_r$, conforme in $O, \bar{O}$, e nei punti corrispondenti dei loro intorni del I° ordine le direzioni caratteristiche per $O, \bar{O}$ sono le rette isotrope e inoltre una retta reale (6). Le proiettività caratteristiche fra coppie di rette isotrope corrispodenti sono tutte subordinate da una stessa omografia (*omografia caratteristica*) (7).

Le calotte ipersferiche σ_2 del secondo ordine per O sono caratterizzate dall'avere come generatrici del cono asintotico le rette isotrope per O appartenenti all'iperpiano ivi tangente alla calotta. Segue che una trasformazione conforme in $(O. \bar{O})$ e nei punti corrispondenti dei loro intorni del 1° ordine muta calotte ipersferiche σ_2 per O in calotte ipersferiche $\bar{\sigma}_2$ per $\bar{O}$.

La corrispondenza determinata dai centri di curvatura di σ_2 ipersferiche corrispondenti (cioè dai centri delle ipersfere da esse individuate) per $O, \bar{O}$ è un'omografia.

Ciò posto, si ha il seguente risultato che generalizza quello del n. 3:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due spazi euclidei S_r $\bar{S}_r$ $(r > 2)$ *sia conforme in una coppia di punti corrispondenti* $O, \bar{O}$ *e nei punti corrispondenti appartenenti agli intorni del* 1° *ordine di* $O, \bar{O}$, *è che a calotte ipersferiche del* 2° *ordine per* O *corrispondano calotte ipersferiche per* $\bar{O}$ *e che l'omografia determinata dai centri di curvatura di calotte ipersferiche corrispondenti sia l'omografia caratteristica fra le rette isotrope.*

(6) In generale le rette caratteristiche, in una trasformazione puntuale fra due S_r. sono $2^r - 1$. (Si veda: M. VILLA, la prima delle Note lincee cit, p. 58).

(7) Si veda (per $r = 3$): G MARTINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi nel caso conforme.* « Rend. dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere » (1949).