Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Castoldi

Attorno a un limite notevole

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 128–129.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_128_0>

Attorno a un limite notevole.

Nota di Luigi Castoldi (a Genova).

Sunto: *Si calcola il valore del limite di un integrale avente interesse in questioni di Calcolo operativo.*

In talune ricerche sui fondamenti del Calcolo degli operatori si presenta utile il calcolo del seguente limite

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta} d\vartheta, \tag{1}$$

dove α è costante reale positiva e β variabile reale.

Dimostriamo che è

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta} d\vartheta = \begin{cases} o & \text{per } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{per } \alpha \geqq 1. \end{cases} \tag{2}$$

A tale scopo giova scomporre l'intervallo di integrazione in due parti $(o, \vartheta(\beta))$ e $\left(\vartheta(\beta), \frac{\pi}{2}\right)$ con estremo comune $\vartheta(\beta)$ convenientemente variabile con β, nel modo seguente. Poniamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta} d\vartheta = I_1 + I_2, \tag{3}$$

con

$$I_1 = \int_0^{\vartheta(\beta)} \beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta} d\vartheta; \qquad I_2 = \int_{\vartheta(\beta)}^{\frac{\pi}{2}} \beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta} d\vartheta, \tag{4}$$

e $\vartheta(\beta)$ definito dall' equazione

$$\beta^\alpha e^{-\beta \cos \vartheta(\beta)} = 1, \tag{5}$$

ossia

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta(\beta) = \operatorname{arcsen} \alpha \frac{\log \beta}{\beta} \qquad \left(0 < \vartheta(\beta) < \frac{\pi}{2}\right). \tag{5'}$$

Importa osservare che la (5') porge per $\vartheta(\beta)$ un valore reale, crescente con β, e sempre soddisfacente alla limitazione indicata in parentesi, tostochè sia β sufficientemente grande, e precisamente

$$\beta > \beta^* = \begin{cases} 1 \quad \text{se è} \quad \alpha \leqq e \\ \text{alla soluzione maggiore di } e \text{ dell' equazione} \\ \beta^* = \alpha \log \beta^*, \quad \text{se è} \quad \alpha > e. \end{cases}$$

Ciò posto si riconosce subito che, con α positivo qualunque si ha

(6) $$\lim_{\beta \to +\infty} I_1 = 0.$$

Infatti, preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e $\vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$ in modo che sia $\frac{\pi}{2} - \vartheta_1 < \varepsilon$, l'integrando in I_1 tende uniformemente, a zero in (o, ϑ_1), non appena risulti $\vartheta(\beta) > \vartheta_1$, mentre si mantiene ≤ 1, in virtù di (5), nell'intervallo $(\vartheta_1, \vartheta(\beta))$ di ampiezza $< \varepsilon$.

Quanto all'integrale I_2, giova stabilire per esso la seguente doppia limitazione. Osservato che è, con $o > \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\beta^\alpha e^{-\beta\cos\vartheta}\right) = \beta^{\alpha+1} e^{-\beta\cos\vartheta}(\cos\vartheta + \beta \operatorname{sen}\vartheta) > 0,$$

e che pertanto il grafico della funzione integranda in I_2 ha ivi convessità rivolta all'asse ϑ, si ha, da una parte, per $\beta > \beta^*$,

(7) $$I_2 < \frac{\beta^\alpha + 1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta(\beta)_0\right) < 2\alpha \frac{\log\beta}{\beta^{1-\alpha}}.$$

D'altra parte, colla stessa limitazione per β, si ha pure

$$\beta^\alpha e^{-\cos\beta\vartheta} > \beta^\alpha e^{-\beta\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)},$$

e quindi

(8) $$I_2 > \beta^\alpha e^{-\frac{\pi}{2}\beta} \int_{\vartheta(\beta)}^{\frac{\pi}{2}} e^{\beta\vartheta}\, d\vartheta = \beta^{\alpha-1}\left\{1 - e^{-\beta\left[\frac{\pi}{2} - \vartheta(\beta)\right]}\right\} > \beta^{\alpha-1}.$$

È quindi, per (7) e (8),

(9) $$\lim_{\beta \to +\infty} I_2 = \begin{cases} +\infty \text{ per } \alpha \geqq 1 \\ o \text{ per } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Riunendo i risultati (6) e (9) e avendo presenti (1) e (3), si perviene immediatamente alla annunciata relazione (2).