Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Intorno ad un teorema di G. Humbert

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 130–134.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_130_0>

Intorno ad un teorema di G. Humbert.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna) (*).

Sunto. *La somma delle cotangenti degli angoli sotto cui si tagliano due curve algebriche complanari viene calcolata con un metodo di* B. SEGRE. *Si dà poi un' interpretazione geometrica dell' annullarsi di quella somma in un caso semplice.*

In una Memoria (1) recente il prof. B. SEGRE, accanto a vari nuovi risultati, riottiene in modo suggestivo un teorema di G. HUMBERT (2) affermante che due curve algebriche complanari si tagliano sotto angoli le cui contangenti hanno una somma dipendente soltanto dai punti impropri delle due curve. Questo teorema viene ivi stabilito con un procedimento che pure fornisce la suddetta somma in funzione dei coefficienti delle equazioni cartesiane delle due curve. Tale somma risulta un invariante simultaneo della $x^2 + y^2$ e delle forme binarie in x, y costituite dai termini di grado massimo di dette equazioni.

Per consiglio del prof. B. SEGRE io qui mostro come quella somma possa anche venir calcolata applicando un opportuno operatore differenziale al risultante di quelle due forme binarie, e ne deduco un' interpretazione geometrica dell' annullarsi di essa in un caso semplice. Ottengo così una proprietà caratteristica di certe rette notevoli, già altrimenti introdotte col nome di diametri principali da M. PIAZZOLLA-BELOCH (3), associate ad una curva piana algebrica qualsiasi.

1. Siano

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0$$

le equazioni cartesiane di due curve piane algebriche, di ordini n ed m che indicheremo con C_n e Γ_m. Supporremo che C_n e Γ_m siano in posizione generica, e quindi si incontrino in nm punti propri

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell' Università di Bologna.

(1) B. SEGRE, *Sui teoremi di Bézout, Jacobi e Reiss,* « Ann. di Mat. », IV, 26, (1947), pp. 1-26.

(2) G. HUMBERT, *Applications géométriques d' un théorème de Jacobi,* « Journ. de Math. », IV, 1, (1885), pp. 347-356.

(3) M. PIAZZOLLA-BELOCH, *Sulle proprietà geometriche delle curve algebriche piane e in particolare sulla ricerca effettiva degli assi di simmetria,* « Rend. Lincei », serie VI, vol. XXI, fasc. 2, pp. 77-81, (1935).

e distinti. Indicheremo poi con

$$f^*(x,\ y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$$
$$\varphi^*(x,\ y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \dots + b_m y^m$$

i complessi dei termini di grado massimo in $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$, con P_i $(i = 1, \dots, nm)$ i punti comuni a C_n e Γ_m, e con φ_i l'angolo sotto cui esse si tagliano in P_i.

Nella Memoria citata in [1] si dimostra che

$$\sum_{1}^{nm}{}_i \cot \varphi_i = \sum_{1}^{n}{}_j \sum_{1}^{m}{}_l \frac{1 + \alpha_j \beta_l}{\beta_l - \alpha_j} \tag{1}$$

dove α_j e β_l sono le radici delle equazioni in t e θ,

$$\begin{aligned} f^*(t,\ 1) &= a_0(t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_n) = 0 \\ \varphi^*(\theta,\ 1) &= b_0(\theta - \beta_1) \dots (\theta - \beta_m) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ivi inoltre, per calcolare la somma (1) in funzione dei coefficienti di $f^*(x, y)$ e $\varphi^*(x, y)$, si procede nel modo seguente.

Pongasi nella seconda delle (2)

$$\theta = \frac{zt + 1}{z - t}$$

e la si riduca a forma intera, moltiplicando per $(z - t)^m$, il che fornisce un'equazione in z e t, di grado m in ciascuna di queste variabili. Eliminando t fra tale equazione e la prima delle (2) si otterrà un'equazione in z, di grado nm, avente per radici le quantità

$$\frac{1 + \alpha_j \beta_l}{\beta_l - \alpha_j}.$$

Se

$$R(z) = A_0 z^{nm} + A_1 z^{nm-1} + \dots + A_{nm} = 0 \tag{3}$$

è l'equazione a cui così si perviene, i suoi coefficienti risultano funzioni razionali intere nei coefficienti delle (2), ed è:

$$\sum_{1}^{nm}{}_i \cot \varphi_i = -\frac{A_1}{A_0}. \tag{4}$$

Calcoliamo ora A_0 e A_1. All'uopo, come s'è detto, conviene eliminare t fra le equazioni

$$\begin{cases} a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0 \\ b_0(zt + 1)^m + b_1(zt + 1)^{m-1}(z - t) + \dots + b_m(z - t)^m = 0. \end{cases} \tag{5}$$

La seconda delle (5) ordinata secondo le potenze decrescenti di t diventa

$$Q_0(z) t^m + Q_1(z) t^{m-1} + \dots + Q_m(z) = 0, \tag{5'}$$

dove i $Q(z)$ denotano polinomi di grado m nella z. L'equazione risultante richiesta si può allora scrivere nella nota forma di SYLVESTER

$$R(z) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & . & a_m & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ Q_0 & Q_1 & . & . & Q_m & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & Q_0 & Q_1 & . & . & Q_m & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & Q_{m-1} & Q_m \end{vmatrix} = 0.$$

Occorrono soltanto i primi due termini nell'espressione (3) di $R(z)$, i quali si ottengono dallo sviluppo del determinante precedente tenendo conto solamente dei primi due termini in ciascuno dei polinomi Q. Dalla seconda delle (5) si ha

$$Q_i(z) = b_i z_m + [(m - i + 1)b_{i-1} - (i + 1)b_{i+1}]z^{m-1} + \dots \qquad (i = 0, \dots, m)$$

convenendo che $b_{-1} = 0$ e $b_{m+1} = 0$. Il coefficiente di z^{nm} in $R(z)$, che abbiamo indicato con A_0, non è dunque altro che il risultante $\mathfrak{R}$ di SYLVESTER delle $f^*(x, y)$ e $\varphi^*(x, y)$, dove si scrivano nelle ultime n righe i coefficienti della $\varphi^*(x, y)$. Quanto al coefficiente di z^{nm-1}, cioè A_1, esso risulterà la somma di n determinanti d'ordine $m + n$, ottenibili nel modo seguente: in una delle ultime n righe del risultante $\mathfrak{R}$, i cui elementi sono gli $m + 1$ coefficienti b_i di φ^* e zeri, si sostituiscono agli $m + 1$ b_i gli $m + 1$ coefficienti di z^{m-1} nei polinomi Q_i, cioè

$$(m - i + 1)b_{i-1} - (i + 1)b_{i+1}, \qquad (i = 0, \dots, m;\ b_{-1} = b_{m+1} = 0).$$

2. Abbiamo così ottenuto esplicitamente A_0 ed A_1, e quindi la somma (4) in funzione dei coefficienti di $f^*(x, y)$ e $\varphi^*(x, y)$. Mostriamo ora come si possa ottenere A_1 applicando un operatore differenziale ad $\mathfrak{R}$. All'uopo osserviamo che, posto

$$(6) \qquad J(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi^*}{\partial y} \\ x & y \end{vmatrix} = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} y + \dots + c_m y^m = 0$$

risulta

$$c_i = (m - i + 1)b_{i-1} - (i + 1)b_{i+1}, \quad (i = 0, \dots, m;\ b_{-1} = b_{m+1} = 0).$$

Consideriamo poi l'operatore di ARONHOLD associato alle due forme $J(x, y)$ e $\varphi^*(x, y)$, il quale, come è noto, si scrive:

$$\Omega = c_0 \frac{\partial}{\partial b_0} + c_1 \frac{\partial}{\partial b_1} + \dots + c_m \frac{\partial}{\partial b_m}.$$

Si ha allora manifestamente

$$\Omega \mathfrak{R} = A_1 .$$

Ne consegue che A_1 è un invariante simultaneo di $f^*(x, y)$, $\varphi^*(x, y)$ ed $a^*(x, y) = x^2 + y^2$, essendo notoriamente

$$2J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} & \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \\ \frac{\partial a^*}{\partial x} & \frac{\partial a^*}{\partial y} \end{vmatrix}$$

una forma covariante di $\varphi^*(x, y)$ ed $a^*(x, y)$.

L'invariante A_1' che si ottiene scambiando in ciò che precede $f^*(x, y)$ con $\varphi^*(x, y)$ vale $(-1)^{nm-1}A_1$, poichè lo scambio delle due curve muta la somma (4) soltanto in segno e, d'altra parte, tale scambio muta A_0 in $(-1)^{nm}A_0$.

3. Nelle ipotesi specificate al principio del n. 1 per le curve C_n e Γ_m, risulta $A_0 \neq 0$. La condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi della somma delle contangenti degli angoli sotto cui tali curve si tagliano, è dunque $A_1 = 0$.

Vogliamo ora dare, in un caso particolare, un' interpretazione geometrica della $A_1 = 0$. Supporremo $n = 1$, sicchè Γ_m sarà una curva non passante per i punti ciclici ed i cui punti impropri sono distinti e di essa dovremo considerare le intersezioni con una retta C_1. Attualmente è

$$f^*(x, y) = a_0 x + a_1 y$$

e si verifica immediatamente che A_1 non è che il risultante di $f^*(x, y) = 0$ e $J(x, y) = 0$. L'annullarsi di A_1 significa pertanto che la direzione di C_1 è una delle direzioni rappresentate da $J(x, y) = 0$, le quali possono manifestamente caratterizzarsi così: se D è una di esse e $\overline{D}$ denota la direzione ad essa ortogonale, allora D appartiene al gruppo primo polare di $\overline{D}$ rispetto a $\varphi^*(x, y) = 0$. In virtù della legge di reciprocità delle polari $\overline{D}$ dovrà dunque essere la direzione $(m-1)$-esima polare di D rispetto a $\varphi^*(x, y) = 0$. Dunque D è tale che la direzione $(m-1)$-esima polare di essa rispetto a $\varphi^*(x, y) = 0$ è ad essa ortogonale.

Consideriamo la retta polare di una direzione D rispetto alla curva Γ_m; tale retta avrà la direzione $(m-1)$-esima polare di D rispetto a $\varphi^*(x, y) = 0$ vale a dire la direzione ortogonale a D. Una retta siffatta dicesi, secondo M. PIAZZOLLA-BELOCH, un diametro principale della curva Γ_m [4].

[4] Invero l'equazione (5) a p. 78 della Nota citata in [3], che fornisce i coefficienti angolari delle direzioni ortogonali ai diametri principali di una curva, coincide, salvo le notazioni, con la $-J(1, k) = 0$.

Possiamo dunque concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva piana algebrica d'ordine m, *non passante per i punti ciclici ed i cui punti impropri siano distinti, ed una retta che la incontri in* m *punti propri e distinti, si taglino sotto angoli la somma delle cui cotangenti sia nulla, è che la retta sia perpendicolare ad un diametro principale della curva.*

È noto che il teorema di HUMBERT vale anche per curve riducibili. In base a tale toerema, per calcolare la somma delle cotangenti degli angoli sotto cui si tagliano due curve, nelle condizioni più volte specificate, si può a ciascuna curva sostituire una curva spezzata in un gruppo di curve aventi complessivamente lo stesso ordine e gli stessi punti impropri della curva data. Da questa osservazione e dall'ultima proposizione segue il risultato:

Due curve piane algebriche, C_n e Γ_m, di ordini n *ed* m, *nessuna delle quali passi per i punti ciclici ed i cui punti impropri siano distinti, le quali si incontrino in* nm *punti propri e distinti, si tagliano ivi sotto angoli la somma delle cui cotangenti è nulla, se si suppone che ogni punto improprio di una di esse sia una direzione ortogonale ad un diametro principale dell'altra.*

Esaminiamo ora il caso in cui fra i punti impropri di ciascuna curva ve ne siano di coincidenti, e non si escluda che qualcuno di quelli possa cadere nei punti ciclici. Un punto di Γ_m, diverso dai punli ciclici, che conti per $r(\geq 2)$ sarà incluso in $J(x, y) = 0$ $r-1$ volte; esso non ha una retta polare propria rispetto alla curva, e quindi non gli corrisponde un diametro principale. Chiameremo *direzione principale* la direzione ortogonale al detto punto improprio. Se i punti ciclici contano r volte ciascuno fra i punti impropri di Γ_m, essi saranno inclusi r volte ciascuno fra i punti $J(x, y) = 0$. Ma, in base al teorema di HUMBERT, possiamo sostituire alla Γ_m altre due curve Γ'_{2r} e Γ''_{m-2r}, di cui la prima passi r volte per ciascuno dei punti ciclici e la seconda passi per i rimanenti punti impropri di $\Gamma_m \cdot \Gamma'_2$, non da nessun contributo alla somma delle contangenti degli angoli sotto cui C_n e Γ_m si tagliano. Nel calcolo di tale somma possiamo dunque prescindere dai punti ciclici quando essi appartengano ad una delle curve.

In ogni caso chiameremo *direzioni principali* di una curva Γ_m le direzioni ortogonali a quelle date da $J(x, y) = 0$, escludendo da queste i punti ciclici se vi fossero. È chiaro allora che i risultati precedentemente ottenuti sussistono ancora quando la C_m e Γ_m abbiano punti impropri da contarsi più volte e passino con molteplicità qualsiansi per i punti ciclici, purchè, negli enunciati, si sostituisca alla espressione *diametro principale* la espressione *direzione principale.*