Bollettino Unione Matematica Italiana

Franco Pellegrino

Su alcune equazione funzionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 135–139.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_135_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Su alcune equazioni funzionali.

Nota di FRANCO PELLEGRINO (a Roma)

Sunto. - *Si risolvono nel campo reale tutte le equazioni del tipo* $v(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, *nella funzione incognita* $f(x)$, *dopo aver determinato la condizione necessaria e sufficiente cui deve soddisfare la* $v(x)$ *perchè esse risultino possibili. Si danno inoltre alcuni risultati su classi di equazioni più generali della precedente.*

1. Per un' altra ricerca ho dovuto studiare alcune classi di equazioni funzionali che mi si sono presentate. Comunico quì i risultati ottenuti.

Consideriamo nel campo reale la classe di equazioni funzionali:

$$v(x)f(u(x)) = f(x) \tag{1}$$

nella funzione incognita $f(x)$ ed essendo quindi $v(x)$ ed $u(x)$ funzioni note.

Supposto che le funzioni v e u siano tali che la corrispondente equazione (1) sia possibile, consideriamo pure l'equazione:

$$f(u(x)) = f(x) \tag{2}$$

che diremo «associata» della (1). Sussiste allora il seguente teorema:

Se $f^*(x)$ *è una soluzione qualsiasi della* (1) *e* $f_1(x)$ *é una soluzione della* (2), *il prodotto*

$$f^*(x) \cdot f_1(x)$$

dà una soluzione della (1), *e anzi, al variare della* f_1 *nell'insieme delle soluzioni della* (2), *si ottengono così tutte (e sole) le soluzioni della* (1).

È infatti per Hp.:

$$v(x)f^*(u(x)) = f^*(x) \qquad \text{e} \qquad f_1(u(x)) = f_1(x)$$

che moltiplicate membro a membro dimostrano la prima asserzione. Se ora è $F(x)$ una qualsiasi altra soluzione della (1), poniamo

$$F(x) = f^*(x)k(x).$$

È allora

$$v(x)f^*(u(x))k(u(x)) = f^*(x)k(x)$$

da cui segue subito che $k(x)$ è soluzione della (2), Del resto prendendo i logaritmi di ambo i membri della (1) abbiamo.

$$\log f(u(x)) - \log f(x) = -\log v(x)$$

ovvero, posto $H(x) = \log f(x)$, e $g(x) = -\log v(x)$, la (1) si trasforma nella

$$H(u(x)) - H(x) = g(x) \tag{1'}$$

che è un'equazione funzionale lineare, e per essa ci si convince subito che la soluzione generale si ottiene aggiungendo ad una soluzione particolare H^* la soluzione generale dell'equazione omogenea.

$$H(u(x)) - H(x) = 0\,. \tag{2'}$$

Per risolvere la (1), quando ciò sia possibile, è dunque sufficiente di trovarne una soluzione particolare e di risolvere l'equazione associata (2).

2. Sia ora $h(x)$ la funzione inversa della funzione $u(x)$ (che compare nella (1)) in un intervallo dove detta funzione $u(x)$ sia invertibile. Cambiando x in $h(x)$, la (1) si scrive

$$v(h(x))f(x) = f(h(x)) \tag{1''}$$

e la (2)

$$f(x) = f(h(x))\,. \tag{2''}$$

Ricordando la (2), segue allora, dalla (2''), che se la (2) è possibile ogni sua soluzione $f(x)$ soddisfa necessariamente alla relazione:

$$f(u(x)) = f(h(x))\,. \tag{3}$$

3. Tale relazione è certo soddisfatta se la funzione $u(x)$ è uguale alla sua inversa $h(x)$, se cioè è $u(u(x)) = x$, se cioè ancora il grafico della $u(x)$ è simmetrico rispetto alla $y = x$. (Esempi di tali funzioni sono $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = -x$). Mettiamoci in tali ipotesi e consideriamo la classe di equazioni funzionali (che possiamo chiamare di tipo involutorio) che si ottengono dalla (1) per $v(x) = u(x)$

$$u(x)f(u(x)) = f(x)\,. \tag{4}$$

Cambiando x in $u(x)$ abbiamo allora che esse si riportano tutte alla forma

$$xf(x) = f(u(x))\,. \tag{5}$$

Confrontando con la (4) otteniamo allora:

$$u(x)xf(x) = f(x)$$

da cui

$$u(x)x = 1$$

e quindi

$$u(x) = \frac{1}{x}.$$

Se ne deduce allora che *l'unica equazione del tipo* (4) *che può essere possibile* è la

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x). \tag{6}$$

4. La (6) è un caso particolare anche delle equazioni

$$v(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x). \tag{7}$$

Cambiando nella (7) x in $\frac{1}{x}$ abbiamo

$$v\left(\frac{1}{x}\right) f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7'}$$

che confrontata con la (7) dà l'altra condizione necessaria

$$v\left(\frac{1}{x}\right) v(x) = 1. \tag{8}$$

Prendendo i logaritmi di ambo i membri della precedente equazione abbiamo

$$\log v\left(\frac{1}{x}\right) + \log v(x) = 0$$

ovvero

$$g\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) = 0$$

e posto $x = e^t$ abbiamo

$$g(e^t) + g(e^{-t}) = 0$$

ovvero, posto ancora $g(-t) = G(t)$, si ha

$$G(-t) = -G(t) \tag{9}$$

che ha come soluzioni tutte e sole le funzioni simmetriche rispetto all'origine. È cioè $G(t) = tk(t^2)$ con k funzione arbitraria. Le soluzioni della (8) sono dunque del tipo

$$v(x) = e^{G(\log x)} = e^{\log x k(\log^2 x)} \tag{10}$$

con k funzione arbitraria. Perchè dunque le equazioni (7) siano possibili è necessario che la funzione $v(x)$ sia del tipo (10),

Tale condizione necessaria è però anche sufficiente come dimostra il seguente procedimento risolutivo.

Per risolvere le (7), con la $v(x)$ data dalla (10), cominciamo con l'osservare che la loro equazione associata

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \tag{11}$$

è subito risolta a mezzo della sostituzione $x = e^t$. Mediante essa la (11) si trasforma infatti nella

$$f(-t) = f(t)$$

che ha evidentemente per soluzioni tutte e sole le funzioni simmetriche rispetto all'asse delle y e cioè le funzioni $G_1(t)$ del tipo $k_1(t^2)$. Le soluzioni della (11) sono dunque tutte e solo quelle date dalla formula

$$f(x) = G_1(\log x) = k_1(\log^2 x) \tag{12}$$

con k_1 funzione arbitraria.

5. Si tratta ora di trovare una soluzione particolare della (7). Da essa abbiamo

$$\log f\left(\frac{1}{x}\right) - \log f(x) = -\log v(x)$$

ovvero per il teorema di CAVALIERI - LAGRANGE. applicato alla funzione $\log X$ relativamente all'intervallo $X_1 = f(x)$. $X_2 = f\left(\frac{1}{x}\right)$, e tenendo presente la (8)

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)\right)\frac{1}{z(x)} = \log v\left(\frac{1}{x}\right) \tag{13}$$

dove la funzione $z(x)$ così introdotta è certamente uniforme per essere $\log X$ funzione monotona e del resto si ha

$$z(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}{\log f\left(\frac{1}{x}\right) - \log f(x)}. \tag{14}$$

Poichè dalla (7) si ha

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)\frac{1}{v(x)} = f(x)v\left(\frac{1}{x}\right)$$

la (13) diventa

$$f(x)\left(v\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) = z(x)\log v\left(\frac{1}{x}\right)$$

da cui

$$f(x) = z(x) \frac{\log v\left(\frac{1}{x}\right)}{v\left(\frac{1}{x}\right) - 1} . \tag{15}$$

Ma la (14) ci dice che è

$$z(x) = z\left(\frac{1}{x}\right)$$

e allora il teorema del numero 1 ci porta a pensare che una soluzione della (7) possa essere il secondo fattore della (15) che per la (8) può scriversi

$$v(x) \frac{\log v(x)}{v(x) - 1} .$$

Poichè tale espressione verifica la (7), ricordando la (12), si conclude che a norma del teorema del n. 1, tutte le soluzioni della (7) sono date da

$$f(x) = v(x) \frac{\log v(x)}{v(x) - 1} k_1 (\log^2 x) \tag{16}$$

con k_1 funzione arbitraria (e dove $v(x)$ può essere solo una funzione del tipo (12)).

Alle soluzioni (16) si può dare un' espressione più semplice qualora si osservi che un' altra soluzione particolare della (7) è $\frac{v(x)}{1 + v(x)}$ che ho trovato per tentativi. Si ha allora che tutte le soluzioni della (7) possono essere anche espresse mediante la formula

$$f(x) = \frac{v(x)}{1 + v(x)} k_1 (\log^2 x) . \tag{16'}$$

6. Se ora osserviamo che la funzione $\frac{1}{x}$ è del tipo (10) ne concludiamo che anche la (6) ha soluzioni e che esse sono tutte date dalla formula

$$f(x) = \frac{1}{1 + x} k_1 (\log^2 x) . \tag{17}$$

Poichè la precedente e la (16) e (16'), opportunamente interpretate valgono anche nel campo analitico, ne concludiamo poi che sono così determinati tutti i funzionali analitici lineari aventi l'indicatrice simmetrica uguale all'indicatrice emisimmetrica.