BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIO SUPINO

Geometria del disegno e approssimazione numerica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 160–167.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_160_0>

Geometria del disegno e approssimazione numerica.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *Si espongono, con osservazioni critiche, le ricerche sulla « geometria del disegno » del* KLEIN *e della sua Scuola.*

1. In un paragrafo molto conosciuto della *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* il KLEIN (1) ha esposto nel 1902, alcune idee sulla geometria del disegno (« Zeichnende Geometrie »), il cui scopo, come egli scrive, sta nella rappresentazione di relazioni spaziali (geometria descrittiva) o nella sostituzione del calcolo numerico con disegni (calcolo grafico).

Il KLEIN afferma che, per la geometria del disegno, non è stata sviluppata una teoria razionale degli errori (2), analoga a quella seguita in geodesia, intendendo che una teoria degli errori sia *razionale* se fondata su considerazioni di calcolo delle probabilità.

Ma dopo questa premessa i suggerimenti del KLEIN non hanno altri accenni probalistici.

Egli afferma che se si vuol costruire una teoria degli errori delle costruzioni geometriche, non si deve pensare alle proposizioni

(1) Cfr. F. KLEIN, *Elementarmathematik vom hoheren Standpunkt aus.* Vol. III. *Präzisions - und Approximations-mathematik,* pag. 171 e segg., 3ª ed., Berlino 1928 (la prima ed. è del 1902).

(2) Si prescinde qui naturalmente dalle ricerche successive al 1902.

« ideali » della matematica (che possiamo chiamare di precisione). ma si devono stabilire dei teoremi paralleli nella matematica di approssimazione. È noto, per esempio, l'enunciato del teorema di PASCAL: « Dato un esagono iscritto in una conica le intersezioni delle tre coppie di lati opposti sono allineate »; si tratta di un enunciato della « geometria di precisione » di fronte al quale si potrebbe cercare un teorema di PASCAL generalizzato che il KLEIN propone di enunciare « provvisoriamente » nella forma: « Se un esagono è *presso a poco* iscritto in una conica le intersezioni delle rette che *approssimativamente* costituiscono i lati opposti si trovano *quasi* allineate ».

Il compito della matematica di approssimazione starebbe nel sostituire le parole « presso a poco », « approssimativamente », « quasi » con elementi precisi: quando le coordinate dei sei vertici dell'esagono si spostano di $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_6$ allora le tre intersezioni dei lati opposti formano un triangolo: si tratterebbe di trovare se l'area di questo triangolo è infinitesima con $\delta_1 \dots \delta_6$ (e se è infinitesima dello stesso ordine o di ordine diverso).

Nella geodesia e nella astronomia di posizione questo procedimento è usato correntemente e le formule relative si chiamano formule differenziali; pertanto, osserva sempre il KLEIN, in geometria dovremmo cercare non soltanto la dimostrazione di un teorema, ma anche le relative formule differenziali; soltanto così si potranno stabilire le basi teoriche per utilizzare il teorema nel campo delle costruzioni geometriche.

2. Queste idee del KLEIN hanno provocato sviluppi e precisazioni. Ma prima di riferire su quanto è stato scritto dopo il 1902 osserviamo che il KLEIN (come egli stesso ricorda) è stato in parte preceduto dal LEMOINE (3), fondatore della *geometrografia*.

(3) Si veda É LEMOINE, *De la mesure de la simplicité dans les constructions géométriques*, « Comptes Rendus des séances de l'Academie des Sciences ». T. CVII, pag. 169 (16 juillet 1888). — *Géométrographie*, « Association Française pour l'Avancement des sciences », (Congrès de Pau, 1892). *Étude sur le triangle et sur certains points de Géométrographie*, (« Proceedings of The Edimburgh Math. Society ». Vol. XIII, 1894-1895).

Si vedano inoltre i seguenti volumi degli Atti della Association Française pour l'Avancement des Sciences: Congrès de Carthage, 1896; Congrès de Boulogne-sur-mer, 1899; Congrès de Paris, 1900; ed infine: La géométrographie dans l'espace. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences 3 dic. 1900. v. anche: MEHMKE, *Bemerkungen zur Geometrografie*, von M. E. LEMOINE, « Jahresbericht der Deutch. Math. Ver. », 1903, pagg. 113-116.

Il LEMOINE si proponeva di studiare la maggiore o minore semplicità delle costruzioni geometriche; egli si riferiva principalmente alle costruzioni nel piano, ma il procedimento è stato esteso concettualmente anche allo spazio, con due note del 1900. Limitandoci al caso piano, si osservi che le costruzioni eseguibili con la riga e col compasso includono tutte in numero maggiore o minore le seguenti operazioni:

1) Far passare il bordo di una riga per un punto fissato op : (R_1)
[da cui segue: far passare il bordo di una riga per due punti fissati op : $(2R_1)$].

2) Tracciare la retta che segue il bordo di una riga op : (R_2).

3) Mettere una delle punte di un compasso in un punto fissato op : (C_1).
[da cui segue: prendere col compasso una lunghezza data op : $(2C_1)$].

4) Mettere una delle punte di un compasso in un punto indeterminato di una linea tracciata op : (C).

5) Tracciare il cerchio op : (C_3).

Se si ammette di usare oltre che la riga e il compasso anche la squadra, allora nascono altre due operazioni:

6) Porre il lato della squadra su una riga op : (E_1).

7) Far scorrere la squadra sulla riga op : (E_2).

Una costruzione geometrica con riga, compasso e squadra si riassume quindi nelle op. $(a\,R_1 + b\,R_2 + c\,C_1 + dC_2 + e\,C_3 + f\,E_1 + g\,E_2)$; se a ogni operazione si attribuisce la stessa difficoltà allora il numero delle operazioni è un indice della *semplicità* della costruzione; ma si può anche, sulla base di osservazioni sperimentali, ritenere più precise alcune operazioni in confronto ad altre attribuendo ad ogni operazione un proprio numero (più basso per la operazione più precisa); allora il numero che risulta per ogni costruzione è un indice della sua precisione. Numeri più bassi corrispondono sempre alle costruzioni più *semplici* e *precise* Ne segue che tra varie costruzioni di uno stesso problema geometrico, la geometrografia indica quale è la più « economica » dal punto di vista costruttivo (cioè quale è la più semplice) ed insieme indica un criterio per valutarne la precisione (4).

(4) Non sembra che il KLEIN si sia accorto che in memorie successive alla prima il LEMOINE parla anche di *precisione* (oltre che di semplicità) avvicinandosi così alla impostazione da lui proposta. Si vedano gli Atti del Congrès de Pau (1892) già citati.

3. Ritorniamo ora al KLEIN. Il suo suggerimento per la matematica di approssimazione contiene in sostanza due idee differenti: una *probalistica*, l'altra relativa alle *formule differenziali*. Il collegamento tra le due è molto tenue come meglio preciseremo in seguito. Qui vogliamo osservare che la distinzione tra le due idee si rende manifesta nei lavori dei suoi seguaci: il GEUER, il BÖHMER e il NITZ.

Il GEUER (1902) cerca di determinare gli enti geometrici in base a condizioni sovrabbondanti; queste vengono poi ridotte col metodo dei minimi quadrati. Così una retta è determinata con tre punti: se questi non sono allineati la posizione della retta è stabilita con la condizione che la somma dei quadrati delle distanze di tre punti della retta sia un minimo. Il valore di questo minimo dà un indice della precisione della costruzione.

Il BÖHMER si riattacca invece con la sua ricerca al concetto delle formule differenziali che egli deduce per la costruzione geometrica di un triangolo, dati i valori dei lati, e per il teorema di PASCAL. Per quest'ultimo caso la ricerca non è però condotta fino alla formula definitiva. Comunque interessa rilevare che in questo caso egli cerca la conica più prossima a sei punti dati cercando la soluzione sia sulla base del metodo dei minimi quadrati che su quello di PONCELET–CEBICEFF (5).

4. Più importante e originale è la ricerca del NITZ (6). Egli osserva che nel disegno si incontrano due specie di errori: quelli dovuti alla imperfezione degli strumenti e quelli soggettivi del disegnatore. Soltanto a questi ultimi può riferirsi una teoria delle costruzioni geometriche, non potendosi considerare i primi come accidentali.

Per svolgere la teoria degli errori (non strumentali) il NITZ parte dalle seguenti premesse:

1) Quando si segna con la punta del compasso un punto qua-

(5) La ricerca del BÖHMER è una diss. di GOTTINGA (1904); quella del GEVER si trova nell' « Jahresbericht del Progymnasium di Burlach » (Baden). Li cito da una nota alla 3ª ed. del KLEIN (pag. 174).

(6) Cfr. KONRAD NITZ, *Beiträge zu einer Fehlentheorie der geometrischen Konstructionen*, « Zeitschr. für Math. und Phys. », 1906, pag. 1-17 e la sua Dissertazione di Königsberg ivi citata. È da rilevare che in questi articoli il NITZ ricorda lavori abbastanza antichi sulla attendibilità delle operazioni geometriche: in particolare R. COTES, *Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphaerici*, 1709. Chr. v. WOLF, *Elementa Mathescos*, 1713. Altri autori successivi sono LAMBERT. MASCHERONI, SERVOIS, BRIANCHON.

lunque di una retta, tutti i punti che hanno eguale probabilità di essere individuati si trovano su rette parallele alla data.

2) Quando si vuol individuare con la punta del compasso un punto isolato, tutti i punti di eguale probabilità stanno su un cerchio con centro nel punto.

3) Quando si pone la riga su un punto isolato per tracciare una retta, che del resto è arbitraria, tutte le rette di eguale probabilità inviluppano un cerchio con centro nel punto.

4) Si ammette la validità della legge degli errori di GAUSS.

5) Si ammette la indipendenza degli errori (nel senso che l'errore in un punto A è la somma degli errori di costruzione precedenti la determinazione di A e di quelli propri ad A).

Dopo ciò il NITZ passa ad esaminare le operazioni che si possono eseguire con la riga e il compasso e considera separatamente:

I) L'errore che si ammette quando si vuol individuare con la punta del compasso la intersezione di due rette, di una retta e di un cerchio o di due cerchi (costruzioni che egli ritiene distinte in un primo tempo, ma che poi considera insieme sostituendo ad ogni cerchio la sua tangente nel punto intersezione);

II) l'errore che si commette quando si congiungono due punti con una retta;

III) l'errore che si commette quando si costruisce un cerchio di cui è dato il centro e il raggio.

Le tracce di due rette segnate con riga e lapis avranno un certo spessore e la loro intersezione sarà rappresentata da un piccolo parallelogramma. Quando si voglia individuare la intersezione delle due rette, la probabilità elementare che la punta di un compasso cada nel centro del parallelogramma o in un altro punto segue la legge di GAUSS, sicchè i punti che possono essere segnati con la stessa probabilità si trovano su un'ellisse che ha il centro nella intersezione delle diagonali del parallelogramma e che ammette come coniugate le direzioni dei lati. Facendo variare la probabilità da 0 a 1 si ottiene una serie di ellissi coassiali e simili. L'ellisse dell'errore medio (probabilità 1/2) si sceglie per caratterizzare l'attendibilità della operazione I. Se si assumono le due rette come assi coordinati (obliqui) e se m_1 e m_2 sono le componenti di errore sulla prima e seconda retta, allora l'ellisse di errore ha per equazione

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega}$$

e da questa si deduce per l'errore quadratico medio in una direzione ψ la relazione

$$k_\varphi^2 = \frac{m_1^2 \cos^2(\psi - \omega) + m_2^2 \cos^2 \psi}{\operatorname{sen}^2 \omega} . \tag{1}$$

Se si traccia una retta per due punti (individuati da piccoli circoletti), la sua posizione potrà essere differente; le rette di uguale probabilità inviluppano un'iperbole e anche in questo caso si sceglie l'iperbole di errore medio (probabilità 1/2) per caratterizzare l'operazione II. Per scrivere la formula d'errore relativa a questo caso si indichino con O_1, O_2 i punti dati; quelli segnati nel disegno siano invece O_1' e O_2' a distanza ρ_1 e ρ_2 dalla $\overline{O_1 O_2}$ (le distanze si indicano col loro segno). L'errore di direzione della $\overline{O_1' O_2'}$ è dato da

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\rho_1 - \rho_2}{d} \qquad (d \equiv \overline{O_1 O_2})$$

e lo scarto quadratico medio angolare vale

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{M_1^2 + M_2^2}{d^2} \tag{2}$$

essendo M_1 e M_2 gli errori medi commessi nel segnare i due punti.

Per questo caso occorre anche un'altra formula: Un punto P appartenente ad $\overline{O_1 O_2}$ si individua nel disegno come P' (appartenente ad $\overline{O_1' O_2'}$). La distanza ρ di P da P' è espressa in funzione di ρ_1 e ρ_2, d e $p (\equiv \overline{O_1' P'})$ dalla relazione ovvia

$$\rho = \rho_1 (1 - p/d) + \rho_2 p/d$$

da cui, in base alla ricerca dei valori medi, si ricava

$$M_p^2 = M_1^2 (1 - p/d)^2 + M_2^2 (p/d)^3. \tag{3}$$

Tutte le costruzioni geometriche elementari si fondano, secondo il NITZ, su queste tre formule (7).

Applichiamole ad una costruzione completa. Sia da costruire la perpendicolare ad AB nel suo punto di mezzo. La soluzione si ottiene, come è noto, costruendo con centro in A e B rispettivamente due archi di cerchio di raggio $r \left(r > \frac{AB}{2} \right)$. La congiungente delle loro intersezioni C, D è la perpendicolare cercata. Supponiamo che il segmento $\overline{AB}$ sia limitato in A e B con due tratti perpendicolari ad AB. Le ellissi di errore si riducono a due cerchi: sia δ il loro raggio. Dobbiamo calcolare:

a) le ellissi di errore in C e D,

b) l'errore angolare per $\overline{CD}$,

c) l'errore di posizione di E nella direzione AB. $(E \equiv \overline{AB}, \overline{CD})$.

(7) E pertanto non è il caso di insistere sulla operazione III a proposito della quale osserveremo soltanto che tutti i cerchi con dato raggio e dato centro dànno luogo a *toroidi di errore*.

In A si ha un cerchio d'errore di raggio δ; in C avremo lo stesso errore δ più l'errore proprio della determinazione di C: nel complesso sarà, in C, $m_1^2 = 2\delta^2$ (secondo la direzione della tangente al cerchio di centro A ([8])). Lo stesso errore si trova secondo la tangente al cerchio di centro B. L'angolo di intersezione dei due cerchi vale $1 - \frac{a^2}{2r^2}$ ($a = \overline{AB}$) e quindi i semiassi delle ellissi di errore in C sono:

$$S_1^2 = \frac{m_1^2}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2}}, \qquad S_2^2 = \frac{m_2^2}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \text{ ([9]).}$$

Si ricerchi ora l'errore medio angolare per la congiungente CD rispetto alla normale « ideale ». I semiassi d'errore in C e D diretti parallelamente ad AB hanno il valore S_1, ed essendo $\operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = \frac{a}{2r}$ segue

$$M_c = M_D = S_1 = \frac{2r\delta}{a}.$$

Poichè $\overline{CD} = d = \sqrt{4r^2 - a^2}$ così per la formula (2)

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\delta r}{a} \sqrt{\frac{8}{4r^2 - a^2}}$$

angolo di errore della $\overline{CD}$ e per la (3):

$$M = \pm \frac{M_c}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\delta r \sqrt{2}}{a}$$

errore di posizione di E sulla $\overline{AB}$.

A questo punto il Nitz cerca di valutare numericamente θ ed M e suggerisce due formule empiriche per m e M formule ricavate

([8]) La congiungente AC e la tangente in C al cerchio di centro A sono tra loro perpendicolari. Ma l'errore di determinazione di A è lo stesso in tutte le direzioni perchè in A si ha un cerchio di errore; dunque l'errore di A si somma con quello proprio di C qualunque sia la direzione considerata.

([9]) Se $m_1 = m_2 = m$ sono gli errori medi secondo due rette secantisi i semiassi della ellisse d'errore sono

$$S_1 = \frac{m}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}}, \qquad S_2 = \frac{m}{\sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2}}.$$

da numerose misure effettuate su linee molto sottili. Si ha:

$$m = 0{,}042 + 0{,}06\,s \text{ mm.} \qquad M = 0{,}025 + 0{,}10\,s \text{ mm.}$$

essendo s lo spessore della linea in mm.

5. Qualche complemento può essere apportato alla teoria del NITZ. In primo luogo, dal punto di vista della tecnica del disegno, non è il caso di seguire le sue ricerche sperimentali sullo spessore delle varie linee dal momento che questo è ormai standardizzato. Basta quindi riferirsi alle norme DIN [10] e tenere presente che per i disegni tecnici esse prescrivono 8 linee differenti di cui ecco le caratteristiche.

Disegni con linee di spessore diverso

linee grosse	$S = 1{,}2$ mm	1,0 mm	0,8 mm
linee medie	0,6	0,4	0,3.

Disegni con un solo spessore

linee sottili 0,2 0,1 mm.

Ma a parte questa osservazione le formule del NITZ mostrano che almeno in qualche caso (tra cui quello dell'esempio riportato) è possibile dedurre delle *formule differenziali* per le costruzioni geometriche ed insieme qualche indicazione sulla condotta più precisa di queste costruzioni. Se infatti nel tracciamento della perpendicolare ad $AB(=a)$ scegliamo $r \leq a/\sqrt{2}$, allora è $M \leq |\delta|$ cioè l'errore di posizione di E non è maggiore dell'errore che si commette nel valutare la posizione di A; in altre parole la valutazione di E è fatta con una approssimazione non minore di quella dei dati. Se invece è $r \geq \sqrt{2}a$ allora è $M \geq |2\delta|$ cioè l'approssimazione diminuisce durante la costruzione. Analogamente se è $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ si si trova $|\operatorname{sen}\theta| = \frac{2\delta}{a}$.

Queste osservazioni, che non richiedono la conoscenza preventiva di δ, permettono di ricavare dalle ricerche del NITZ delle formule d'errore del tipo di quelle desiderate dal KLEIN; con la differenza che invece di una formula per ogni teorema si ha una formula per ogni *costruzione*; sicchè il risultato risente anche delle idee del LEMOINE.

(Continua).

[10] v. DIN, *Taschenbuch*, 1, Grundormen. 3ª ed., Berlino, marzo 1928, pagg. 58-59.