Bollettino Unione Matematica Italiana

Aldo Andreotti

Sul risultante di due polinomi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 168–169.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_168_0>

Sul risultante di due polinomi.

Nota di Aldo Andreotti (a Pisa).

Sunto. - *Si da una dimostrazione, per via razionale, dell'irriducibilità del risultante di due polinomi in una indeterminata.*

Dati i due polinomi nell'indeterminata x:

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n\,;$$
$$g(x) \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m\,;$$

il loro risultante $\mathrm{R}_{\mathrm{f},\mathrm{g}}$ *rispetto alla* x, *dato nella forma di* Sylvester *da*

$$R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \dots 0 & b_0 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \dots 0 & b_1 & b_0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n & 0 & 0 & 0 \dots b_m \end{vmatrix},$$

come polinomio nelle indeterminate $\mathrm{a_i}$, $\mathrm{b_j}$, $(\mathrm{i} = 0, \dots \mathrm{n};\ \mathrm{j} = 0, \dots, \mathrm{m})$, *è irriducibile.*

L'usuale dimostrazione di questo fatto è basata sul teorema fondamentale dell'Algebra [1]; ne do qui una dimostrazione che non esce dal corpo $K[1; a_i, b_j]$ essendo le a_i, b_j, $(i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, m)$, indeterminate.

Supponiamo, invero, che $R_{f,g}$ si scinda nel prodotto di due polinomi P, Q, del corpo che si considera. Tanto P che Q devono essere omogenei sia nelle a che nelle b ed inoltre isobarici [2].

Sia r il grado di P nelle a, s quello nelle b. Fissato per le a, b,

[1] O, più esattamente, sul fatto che ogni polinomio di grado n si decompone nel prodotto di n fattori lineari in una conveniente estensione del corpo che si considera. V. ad es: Scorza, *Corpi numerici e algebre.* Principato, 1921; cap. III, n. 144.

[2] Se un polinomio omogeneo R si spezza nel prodotto di due altri P, Q, questi sono omogenei. Invero, decomposti P, Q (ove non fossero entrambi omogenei) nella somma delle loro parti omogenee, il prodotto delle parti di grado massimo di P e Q, darebbe una parte di R di grado diverso da quella fornita dal prodotto delle parti di grado minimo.

Analogamente se R è isobarico P e Q sono isobarici Basta nel ragionamento precedente sostituire le parole « grado » e « omogeneo » colle parole « peso » e « isobarico ».

l'ordinamento $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$, il termine $a_0^m b_m^n$ di rango [3] massimo di $R_{f,g}$ deve provenire dal prodotto dei termini di rango massimo di P, Q.

Pertanto P deve contenere (a meno di un coefficiente non nullo) il monomio $a_0^r b_m^s$.

Analogamente considerando le a, b nell' ordine

$$b_0, \dots, b_m, \quad a_0, \dots, a_n,$$

si vede che P contiene il termine $b_0^s a_n^r$.

Considerando infine l'ordinamento $a_1, a_0, a_2, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$, il termine di rango massimo di $R_{f,g}$ è $a_1^m b_0 b_m^{n-1}$ e quindi P contiene o il termine $a_1^r b_0 b_m^{s-1}$, o il termine $a_1^r b_m^s$.

Ma P è isobarico e quindi si devono avere corrispondentemente le uguaglianze

$$ms = nr = r + m(s-1), \quad \text{se } P \text{ contiene} \quad a_1^r b_0 b_m^{s-1};$$
$$ms = nr = r + ms \quad , \quad \text{se } P \text{ contiene} \quad a_1^r b_m^s.$$

Nel primo caso risulta $r = m$, $s = n$, e quindi Q è una costante, che si può supporre $= 1$, onde $P = R_{f,g}$. Nel secondo caso risulta $r = s = 0$ e quindi è $Q = R_{f,g}$. c. v. d.