Adriano Barlotti

Sopra un tema di concorso per la scuola media

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 180–190.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_180_0>

Sopra un tema di concorso per la Scuola Media.

Nota di Adriano Barlotti (a Firenze) (*)

Sunto - *Si prende in esame il tema assegnato in uno dei recenti concorsi a cattedre di Matematica nelle Scuole Medie e se ne indica una soluzione di carattere prevalentemente sintetico che porta a generalizzazioni e osservazioni varie.*

1. Il tema a cui ci riferiamo è quello assegnato nella prova scritta (4) dei recenti esami di concorso a cattedre e di abilitazione all'insegnamento della Matematica nelle Scuole Medie inferiori.

Si tratta di un tema che sembra non privo di interesse, sia per l'argomento, sia per gli accorgimenti con cui cerca di rispondere al suo scopo. Esso non si allontana sostanzialmente dal tipo ormai divenuto tradizionale negli esami di questo genere: nè le particolari circostanze in cui si svolgono quelli attuali, attesi da tanti anni, avrebbero resa opportuna l'introduzione di novità radicali. Ma tuttavia appaiono in esso certe caratteristiche che richiedevano nel candidato una preparazione più concettuale che formale, e lo invitavano ad

(1) Cfr. Castelnuovo op. cit. p. 386.

(2) Si veda ad es. M. Villa, op. cit. pp. 258-259-260.

(3) Riguardo alla parte facoltativa (n. 1), per le serie di coniche di indice 2 si veda Enriques-Chisini, op. cit., pp. 292-302.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(4) Svoltasi il 25 novembre 1948 contemporaneamente nelle sedi di Milano, Firenze, Roma, Cagliari, Napoli e Palermo.

alcune riflessioni per evitargli di abbandonarsi alla meccanica applicazione degli schemi fissi e farne uscire un lavoro privo di ogni personalità. Alla scoperta e alla valutazione della personalità del candidato sembra principalmente mirare questo lavoro, il cui testo, con una successione di domande incalzanti, che guidano e suggeriscono, conduce a una quantità di osservazioni, atte appunto a mettere in luce la capacità di orientamento dell'aspirante alla cattedra. Così il problema proposto, che è del tutto elementare, accanto ad una rapida trattazione analitica del tipo consueto, ne consente un'altra, in sostanza ugualmente semplice, ma fondata sopra avvertenze di carattere sintetico e quindi di sapore più aristocratico.

Nella nostra esposizione contrassegnamo con un asterisco (*) i concetti e le circostanze sulle quali il testo stesso del problema richiamava l'attenzione.

2. Sono dati i cerchi, C' e C'', aventi (in assi cartesiani ortogonali) le equazioni: $x^2 + y^2 = r^2$; $x^2 + y^2 - 2ax + b = 0$.

Detto P un punto di C', sia M l'intersezione della tangente in P a C' con la polare dello stesso P rispetto a C''. Si chiede di determinare e studiare la curva Γ descritta dal punto M quando P percorre C'.

Posto $P \equiv (\alpha, \beta)$, la tangente e la polare predette hanno, rispettivamente, le equazioni:

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y - r^2 = 0, \qquad (\alpha - a)x + \beta y - a\alpha + b = 0.$$

Poichè P varia sopra C', l'equazione della Γ si ottiene eliminando i parametri α e β fra le (1) e la: $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$.

Se ne ottiene subito (supposto $a \neq 0$):

$$(2) \qquad y^2[(ax - r^2 - b)^2 - a^2r^2] + [ax^2 - (r^2 + b)x + ar^2]^2 = 0$$

o, se si preferisce:

$$(3) \quad (x^2 + y^2)(ax - r^2 - b)^2 + ar^2[2ax - ay^2 - 2(r^2 + b)x + ar^2] = 0.$$

La Γ è dunque una *quartica**, e la (3) dice esplicitamente che è *circolare**. Del resto dalla stessa definizione della Γ segue subito il suo passaggio per ciascuno dei punti comuni a C' e a C'' (cfr. anche § 8), e quindi, in particolare, per i punti ciclici. Aggiungiamo che la Γ è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse (d'accordo con il modo stesso in cui è definita rispetto ai cerchi C' e C''), e che ha un punto doppio in quello improprio, Y_∞, dell'asse delle y, come risulta dal fatto che nella (2) mancano i termini di grado superiore al secondo nella y. Le tangenti m' ed m'' alla Γ in Y_∞ sono rappresentate complessivamente da [1]:

$$(4) \qquad (ax - r^2 - b)^2 - a^2r^2 = 0,$$

e ciascuna di esse ha riunite in Y_∞ quattro intersezioni con la Γ (cfr. anche n. 4) Si tratta pertanto di un nodo.

Tagliando la Γ con l'asse $y = 0$, abbiamo dalla (2) i punti, H e K, le cui ascisse sono date da: $ax^2 - (r^2 + b)x + ar^2 = 0$, ciascuno dei quali assorbe due intersezioni. Pertanto, data la simmetria della Γ rispetto alla retta $y = 0$, si tratta di due suoi punti doppi (con le tangenti distinte, per la stessa simmetria e dato che esse non possono cadere nè sull'asse delle ascisse, che altrimenti avrebbe più di quattro intersezioni con la Γ, nè d'altra parte possono essere parallele all'asse delle y poichè le rette per Y_∞ hanno fuori di questo punto soltanto due intersezioni con la curva) [2]. Le tangenti in H e in K hanno un incontro quadripunto. Cioè (come Y_∞) anche H e K sono punti doppi con rami inflessionali (cfr. anche n. 7). La Γ è dunque una *lemniscata proiettiva* [3].

I punti H e K sono reali e distinti quando è:

$$(5) \qquad (r^2 + b)^2 - 4a^2r^2 > 0.$$

Si fermi ora l'attenzione sull'*asse radicale**, p [4]:

$$x = \frac{r^2 + b}{2a}$$

dei cerchi dati. La (5) risulta soddisfatta quando la distanza (in valore assoluto) della p dal centro di C' è maggiore del suo raggio r: cioè, *i punti* H *e* K *sono reali e distinti quando i cerchi* C' *e* C'' *non hanno intersezioni reali* (cerchi non segantesi).

Dalla (2) segue che y è reale quando: $(ax - r^2 - b)^2 \leq a^2r^2$. Si

(1) Cfr., p. es., L. CAMPEDELLI, *Lezioni di Geometria*. Padova, 1948, vol. II, parte seconda: *Le curve e le superficie*, pag. 167.

(2) Il dubbio che nel caso generale la curva Γ possa avere altri punti multipli (oltre H, K e Y_∞), ciò che porterebbe ad uno spezzamento della Γ stessa, si elimina subito osservando che la derivata del primo membro della (2) rispetto ad y è nulla soltanto per $y = 0$ e nei punti delle rette (4).

(3) Cfr. L. BERZOLARI, *Sulla lemniscata proiettiva*, « Rendiconti Istituto Lombardo », II serie, vol. XXXVII, 1904, pag 277.

(4) Cfr., p. es., L. CAMPEDELLI e V. NOTARI, *Esercitazioni di Geometria analitica e proiettiva*. Padova, 1943, pag. 34.

trova così che la parte reale della Γ è tutta interna alla striscia limitata dalle tangenti asintotiche (reali), cioè dalle tangenti in Y_∞. Ora, nell'ipótesi che H e K siano reali e distinti, uno di essi, H, è esterno a tale striscia (cfr. anche n. 4). Si tratta quindi di un *punto doppio isolato*. Il punto K è invece un nodo con tangenti reali.

Se H e K coincidono, i cerchi C' e C'' sono tangenti (internamente o esternamente).

3. Ma se C' e C'' sono tangenti la Γ è riducibile*. Infatti, ponendo nella (2) $r^2 + b = \pm 2ar$, (dove il doppio segno sta ad indicare tangenza in uno o nell'altro dei punti in cui C' incontra l'asse delle x) questa diviene:

$$(x \mp r)[(x \mp 3r)y^2 + (x \mp r)^3] = 0.$$

Quindi la Γ si spezza nella tangente di contatto p dei cerchi dati (¹) e in una cubica che presenta una cuspide in $H \equiv K \equiv (\pm r, 0)$, con la tangente $y = 0$, e un flesso in Y_∞ con la tangente $x = \pm 3r$. Queste circostanze subito si rilevano (²) osservando che con una traslazione degli assi che porti la nuova origine in $H \equiv K$, quella cubica si rappresenta con l'equazione: $X^3 + XY^2 \mp 2rY^2 = 0$.

Un altro caso di spezzamento* della Γ si ha quando C' e C'' sono concentrici (ma distinti), cioè per $a = 0$, $(b \neq r^2)$. Allora la (3) scritta in coordinate omogenee x, y, z, dà (³): $(x^2 + y^2)z^2 = 0$. Quindi la Γ risulta costituita dalla retta impropria contata due volte e dalle rette isotrope uscenti dal centro, 0, comune ai cerchi C' e C'' (⁴).

(¹) Il fatto che, nell'ipotesi ora considerata, l'asse radicale p venga a far parte della Γ, è senz'altro evidente quando si pensi al modo in cui la Γ è stata definita. Infatti se C' e C'' si toccano in H la tangente p in H a C' coincide con la polare di H rispetto a C''.

(²) Cfr., p. es., loc. cit., in (¹) n. 2.

(³) Il ricorso alla (3), per giungere alla quale abbiamo supposto $a \neq 0$, è giustificato da ragioni di continuità.

(⁴) Semplici considerazioni geometriche giustificano la cosa. Infatti la tangente in P a C' e la polare di P rispetto a C'' sono ora parallele, perchè entrambe normali alla PO, e perciò M è improprio. Ed è doppio per la Γ, poichè esso riprende la stessa posizione quando P si cambia nel suo simmetrico rispetto ad O. Inoltre in ciascuno dei punti ciclici I_h $(h = 1, 2)$ i cerchi hanno la stessa tangente che coincide con la retta isotropa OI_h: pertanto se P va in I_h la tangente OI_h a C' in P coincide con la polare di P rispetto a C'', e perciò la OI_h fa parte della Γ.

4. La (2) mette subito in evidenza che la Γ appartiene al fascio individuato dalle due quartiche degeneri, Γ_1 e Γ_2:

$$(6)\qquad y^2[ax - r^2 - b) - a^2r^2] = 0, \qquad [ax^2 - (r^2 + b)x + ar^2]^2 = 0.$$

La loro costituzione si precisa facilmente*. Consideriamo il punto $Q \equiv \left(\frac{r^2+b}{a},\, 0\right)$ simmetrico del centro di C' (origine) rispetto alla p, e conduciamo le due rette, m' ed m'': $x = \frac{r^2+b}{a} \pm r$, parallele alla p e aventi da Q la distanza r.

La prima delle (6) mostra che la Γ_1 è composta* dalla retta dei centri ($y = 0$) contata due volte e dalle rette m' ed m''.

Invece si costruisca un triangolo rettangolo con l'ipotenusa uguale alla distanza della p da O ed un cateto di lunghezza r. Allora l'altro suo cateto d è dato da:

$$d = \frac{1}{2a}\sqrt{(r^2 + b)^2 - 4a^2r^2},$$

e la Γ_2 risulta costituita* dalle due rette, n' ed n'',

$$x = \frac{r^2+b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(r^2 + b)^2 - 4a^2r^2},$$

parallele alla p ed aventi da essa la distanza d, ciascuna delle quali si conti due volte. La n' e la n'' non sono altro che le parallele condotte alla p dai punti H e K dianzi incontrati (§ 2): allora questi risultano doppi tanto per la Γ_1 quanto per la Γ_2 (con tangenti diverse per queste due curve), e quindi anche per tutte le altre quartiche del fascio da esse individuato [1], ed in particolare per la Γ.

L'analogo può dirsi del punto improprio Y_∞, che anzi per la Γ_2 è quadruplo, cosicchè le due rette m' ed m'' vi hanno riunite quattro intersezioni con tutte le curve di quel fascio. Pertanto anche Y_∞ è doppio per la Γ, con le tangenti inflessionali (cioè a incontro quadripunto) m' ed m''. Si ritrovano così per questa via* i risultati già notati nel § 2.

5. Ma c'è anche un'altra rapida maniera di trovare i punti doppi della Γ, che nemmeno richiede la conoscenza dell'equazione di questa avendo un carattere puramente sintetico. Indichiamo con

[1] Cfr., p. es., op. cit., in [1] n. 2, pag. 131 e L. Campedelli, *Lo studio dei luoghi geometrici* in « Il Filomate », 1948, vol. 1, n. 3. pag. 222.

A', B' e A'', B'' i punti in cui i cerchi C' e C'' tagliano la retta dei loro centri $O'O''$ ($y = 0$). Quando P si trova in A' il punto M va in Y_∞, e poichè la cosa si ripete qnando P va in B', la Γ passa doppiamente per Y_∞.

Ricerchiamo ora le intersezioni della Γ con la $O'O''$. Sia N un punto della $O'O''$ e indichiamo con N_0 l'intersezione della $O'O''$ con la polare P_1P_2 di N rispetto a C'. La P_1P_2 è normale alla $O'O''$ e quindi il suo polo N' rispetto a C'' si trova sulla $O'O''$ (che è la polare del punto improprio Y_∞ della P_1P_2 rispetto a C''). In altre parole abbiamo indicato con N_0 il coniugato armonico di N rispetto ad A' e B':

$$(A'B'NN_0) = -1, \tag{7}$$

e con N' il coniugato armonico di N_0 rispetto ad A'' e B'':

$$(A''B''N_0N') = -1. \tag{8}$$

Ne segue che N ed N' si corrispondono nella proiettività, π, prodotto delle due involuzioni che hanno come punti doppi, rispettivamente, A', B' ed A'', B''. *I punti uniti,* H *e* K, *della* π *sono i punti doppi dell'involuzione,* ω, *segnata sulla* O'O'' *dal fascio a cui appartengono i cerchi dati.* Infatti se è $N \equiv N' \equiv H$ si ha dalla (7) e dalla (8) che H ed $N_0 \equiv K$ costituiscono appunto la coppia che separa armonicamente tanto A', B' quanto A'', B''. *Cioè* H *e* K *sono i centri dei cerchi di raggio nullo del fascio predetto.*

Ebbene, se P_1 e P_2 sono i punti in cui la polare P_1P_2 di N rispetto a C' incontra lo stesso C', abbiamo che per N passano le tangenti a C' in P_1 ed in P_2, mentre le loro polari rispetto a C'' s'incontrano in N'. Ne segue che quando è $N \equiv N'$ questo punto appartiene alla Γ, ed è anzi doppio per essa poichè proviene da due diverse posizioni, P_1 e P_2, di P sopra C'. Così ancora una volta ritroviamo i punti doppi H e K della Γ sulla $O'O''$ (cfr. § 2 e § 4), e ne possiamo anche dedurre che l'ordine della Γ stessa è uguale a quattro, poichè H e K costituiscono le sole intersezioni della nostra curva con la retta $O\,O''$. A conferma di quanto già si è verificato (§ 2) possiamo aggiungere che, come è noto [1], i centri dei cerchi di raggio nullo sono reali e distinti quando i cerchi C' e C'' non si tagliano (in punti reali).

Notiamo ancora che *la* Γ *non può avere punti semplici reali interni a* C'. Infatti sia M un punto della Γ interno al cerchio C':

(1) Cfr., p. es., A. COMESSATTI, *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.* Padova, 1930, parte prima, pag. 354.

le tangenti condotte a questo da M sono immaginarie e coniugate, e così pure i loro punti di contatto P_1 e P_2. Perciò se M è reale, essendo comune alla tangente a C' in P_1 e alla polare di P_1 rispetto a C'' si trova pure sulla tangente a C' in P_2 e sulla polare di P_2 rispetto a C'', e quindi risulta doppio. Poichè H e K separano armonicamente le intersezioni della $O'O''$ con C', nel caso in cui risultano reali uno di essi è interno a C' e quindi è un *punto doppio isolato* (cfr. § 2).

6. Ma torniamo alle domande esplicitamente fatte dal tema in esame. La Γ è *razionale**, come è provato dall'esistenza dei suoi tre punti doppi H, K e Y_∞, i quali ne annullano il *genere (teorema del Clebsch)* (1).

Per scriverne le equazioni parametriche (razionali) occorre tagliare la Γ con le coniche C, del fascio che ha per punti base H, K, Y_∞ e un quarto punto Y' scelto sulla Γ. Ognuna di queste C ha una sola ulteriore intersezione con la Γ, cosicchè i punti di questa vengono a trovarsi in corrispondenza biunivoca con le C, e quindi anche con i valori del parametro, t, che individua le C entro il loro fascio (2).

Sviluppiamo questo procedimento nel caso particolare suggerito* in cui l'asse radicale p coicide con la $x=0$ (ciò che porta $r^2+b=0$) ed è $r=1$ e $a=2$ (e quindi $b=-1$). Allora la (2) si scrive: $y^2(x^2-1)+(x^2+1)^2=0$ e la Γ viene ad avere come tangenti in Y_∞ le rette $x\pm 1=0$. Possiamo prendere Y' sopra una di queste, per esempio sulla $x-1=0$, infinitamente vicino a Y_∞. Cioè possiamo ricorrere al fascio:

$$y(x-1)+t(x^2+1)=0 \tag{9}$$

delle coniche che passano per i punti (immaginari coniugati) H, K e che sono tangenti in Y_∞ alla retta $x-1=0$. L'ulteriore punto comune alla conica (9) e alla Γ è:

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y=\frac{1+t^4}{t(1+t^2)}.$$

Queste relazioni forniscono le richieste equazioni parametriche della Γ nelle ipotesi particolari predette.

La razionalità della Γ si desume direttamente dalla sua definizione, senza ricorrere al computo dei punti doppi. Infatti dalle (1) le coordinate x, y, del punto M variabile sulla Γ risultano espresse razionalmente per α e β. Poichè, d'altra parte, α e β sono le coor-

(1) Cfr., p. es., op. cit., in (1) n. 2, pag. 316.
(2) Cfr., p. es., op. cit., in (1) n. 2, pag. 317.

dinate del punto P mobile sul cerchio C', esse possono esprimersi mediante funzioni razionali di un parametro, e quindi lo stesso accade di x ed y (¹).

7. Torniamo alla (2) e, posto $2ah = r^2 + b$, scriviamola nella forma:

$$y^2[(x-2h)^2 - r^2] + [x^2 - 2hx + r^2]^2 = 0. \tag{10}$$

Se ricordiamo che l'asse radicale p dei cerchi dati ha l'equazione $x = h$ (cfr. § 2), la (10) mostra che la Γ dipende solo dalla retta p e dal cerchio C', cioè* essa non muta quando, tenendo fermo C', si sostituisce a C'' un qualunque altro cerchio ($\neq C'$) del fascio individuato da C' e C'' (²).

Questa circostanza si giustifica subito direttamente. Infatti se C'' varia nel fascio predetto la polare di P rispetto a C'' ruota in un fascio il cui centro M sta sulla tangente in P a C', ed è quindi individuato dalla polare di P rispetto ad un qualunque altro cerchio di quel fascio.

Per la proprietà ora stabilita, a C'' si può sostituire un qualunque altro cerchio del fascio, per esempio quello di raggio nullo avente per centro K. Allora M si ottiene come intersezione della tangente in P a C' con la MK perpendicolare a PK in K. In tal modo (se H e K sono reali) *p r la Γ si può dare una definizione del tutto elementare.* Presa una retta generica k per K si considerino le tangenti t e t' condotte a C' nei punti in cui questo è incontrato dalla normale a k per K: la Γ è il luogo descritto dai punti M_1 e M_2, che t e t' hanno in comune con k, quando k varia nel fascio di centro K. Poichè, come abbiamo visto (cfr. § 2) (³),

(¹) Quest'osservazione avverte che per la razionalità di Γ basta che P si muova sopra una curva razionale. Si può quindi immaginare di sostituire ai cerchi dati due curve qualunque, che chiamiamo ancora C' e C'', e definire la Γ come luogo descritto, al variare di P sulla C', dal punto comune alla tangente alla C' in P, e alla retta « polare $(n-1)$-esima di P rispetto alla C'', supposta dell'ordine n (cfr., p. es, op cit., in (¹) n. 2, pag. 175). Allora se la C' è razionale, lo stesso accade della Γ così generalizzata.

(²) Si ricordi che già nel § 5 avevamo osservato come i due punti doppi H e K, che la Γ possiede sull'asse dei centri $O'O''$, dipendono solo dal fascio dei cerchi dati e non da quelli particolari, C' e C'', scelti in esso.

(³) L'ordine della Γ si ritrova anche semplicemente come segue: la nuova definizione data porta a considerare una corrispondenza [1, 2] fra le rette del fascio di centro K e le tangenti a C'. Partendo da questa, nell'ordine di idee seguito nel § 8. si trova sopra una retta generica una corrispondenza di indici [2, 2] avente quattro punti uniti.

la Γ è del quarto ordine, il fatto che la k generica la incontri in due punti (fuori di K) conferma che K è doppio per la Γ. Se la k si prende normale ad una delle tangenti condotte da K a C', si ha $M_1 \equiv M_2 \equiv K$. Cioè *le tangenti alla* Γ *in* K *sono le normali alle tangenti condotte da* K *a* C', e si tratta di tangenti inflessionali (aventi cioè un incontro quadripunto con la Γ in K). Si ritrova anche che il punto K è isolato o no, secondo che è interno o esterno a C' (cfr. § 5).

Se al cerchio C'' si sostituisce quello spezzato nell'asse radicale e nella retta all'infinito, il punto M viene ad essere definito come intersezione della tangente in P a C' con la parallela all'asse radicale condotta per il punto simmetrico di P rispetto a quest'ultimo. Allora con ragionamenti analoghi a quelli sopra svolti si trova che Y_∞ è doppio e che le tangenti in esso vi hanno un incontro quadripunto e sono date dalle simmetriche, rispetto all'asse radicale, delle tangenti a C' nei suoi punti d'incontro con la retta dei centri. Inoltre le tangenti in Y_∞ separano armonicamente le parallele all'asse radicale per H e K.

8. La definizione data per la Γ è di carattere proiettivo, quindi possiamo generalizzarla sostituendo ai cerchi dati due coniche qualsiansi, C' e C''. Conviene allora ricercare l'ordine della Γ con considerazioni sintetiche.

Cominciamo con il riconoscere che quando P percorre la C', la sua polare rispetto alla C'' inviluppa una conica L. Infatti per un punto generico, Q, del piano escono due rette il cui polo rispetto alla C'' è sulla C'^*, cioè che sono tangenti alla L: si tratta delle polari dei punti in cui la C' è tagliata dalla retta polare di Q rispetto alla C''.

Fra le tangenti alla C' e quelle alla Γ nasce un riferimento biunivoco algebrico π, (che è, per la razionalità di quegli inviluppi, una proiettività) [1] nel quale alla tangente alla C' in un suo punto P corrisponde la polare di P rispetto alla C'', e, inversamente, ad una tangente, p, alla L corrisponde la tangente alla C' nel punto P polo della p, sempre rispetto alla C''. Così la Γ risulta essere il luogo dei punti comuni alle rette che si corrispondono in π. Per vedere che questo è effettivamente costituito da

[1] Cfr., p. es., L. Campedelli, *Lezioni di Geometria*. Padova, 1945, vol. I: *La Geometria analitica e gli elementi della Geometria proiettiva*, pag. 282.

una curva del quarto ordine si prenda nel piano una retta generica r e sopra di essa si consideri la corrispondenza ω costruita come segue. Detto A un punto (generico) della r si conducano da esso le due tangenti alla C', e siano A_1' ed A_2' i punti in cui la r è incontrata dalle loro omologhe nella π: i punti A_1' ed A_2' si riguardano come corrispondenti di A nella ω. Viceversa ad un punto A' della r la ω^{-1} associa le intersezioni della r con le rette corrispondenti nella π^{-1} alle due tangenti condotte da A' alla L. Pertanto la ω ha entrambi gli indici uguali a due, e quindi possiede quattro punti doppi *(principio dello Chasles)* (¹), i quali, evidentemente, cadono nelle intersezioni della r con la Γ.

Dal modo stesso con cui la Γ è stata definita segue che essa *passa per i punti* A_1, A_2, A_3 *e* A_4, *comuni a* C' *e a* C''. Possiamo aggiungere che *in ciascuno di questi possiede la medesima tangente della* C'. Per i punti reali comuni a C' e C'' la cosa è immediata. Si può ripetere infatti, qualunque siano le coniche C' e C'', l'osservazione con cui termina il n. 5, e cioè: all'infuori di eventuali punti doppi isolati la Γ non possiede punti reali *interni* a C'. Proviamo la cosa in generale con il seguente ragionamento. Da un punto M della Γ conduciamo le tangenti, MP_1 e MP_2, alla C' e siano P_1 e P_2 i loro punti di contatto. La polare di uno di questi, per esempio di P_1, rispetto a C'' passa per M, quella dell'altro incontra la P_2M in un punto M' che appartiene pure alla Γ. Quando M, muovendolo con continuità sulla Γ, si fa avvicinare ad un punto P della C', la P_1M e la P_2M tendono a sovrapporsi nella tangente alla C' in P, ed M' a portarsi in prossimità di M. Al limite il punto M coincide con P ed M' diviene infinitamente vicino ad esso sulla tangente in P alla C': questo prova quanto si è asserito.

Così gli otto punti comuni alla Γ e alla C' sono assorbiti da A_1, A_2, A_3, e A_4: invece questi dànno solo quattro delle intersezioni della Γ con la C''. Le rimanenti cadono, come è subito visto, nei punti di contatto della C'' con le quattro tangenti che essa ha in comune con la C'.

Se alla C' sostituiamo una curva dell'ordine n e della classe m, l'inviluppo L diviene della classe n, e risulta ancora riferito in modo biunivoco (ma, in generale, non più proiettivo) a quello delle tangenti alla C'. Allora la corrispondenza ω, opportunamente modificata, prova che la Γ diviene dell'ordine $m + n$.

(¹) Cfr., p. es, op. cit., in (¹) n. 2, pag. 212 e L. CAMPEDELLI, *Lo studio dei luoghi geometrici* in « Il Filomate », 1948, vol. 1, n. 3, pag. 217.

9. Se con C' e C'' indichiamo ancora due coniche complanari, la costruzione che dal punto P porta ad M si può generalizzare in quella di una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano π di quelle due coniche. Detto Q un punto generico di π, sia M l'intersezione delle polari di Q rispetto a C' e a C'': fra Q ed M si ha appunto un riferimento biunivoco involutorio che in definitiva è una *trasformazione quadratica*, ω, di π in sè. Infatti quando Q percorre una retta, le sue polari rispetto a C' e a C'' descrivono due fasci proiettivi, e quindi M genera una conica *(teorema dello Steiner)*.

La ω è una trasformazione ben nota [1] che è stata considerata dal PONCELET e che ha importanza anche storica, poichè costituisce uno dei primi esempi di corrispondenze piane di ordine superiore al primo. La sua definizione è indipendente dalla scelta delle coniche C' e C'', ma è solo legata al fascio da queste individuato (cfr. § 7), e i suoi « punti fondamentali » cadono nei punti diagonali del quadrangolo completo che ha i vertici nei punti base di tale fascio (e quindi, nel caso metrico in cui questo è costituito da cerchi, nei centri dei suoi cerchi di raggio nullo e nel punto improprio dell'asse radicale). Allora *la curva* Γ *non è altro che la trasformata di* C' *nella* ω, e pertanto è appunto una quartica con un punto doppio in ciascuno di quei punti fondamentali.

Nell'ipotesi che C' e C'' siano cerchi non secantesi e quindi che H e K risultino reali, se H è quello di essi interno a C' la HY_∞ taglia C' in due punti, P_1 e P_2, che sono reali, e quindi la ω (che concentra la HY_∞ in K) dice che K è un *nodo* con tangenti reali. Lo stesso vale per Y_∞ in cui si concentra la HK, invece H è un punto doppio isolato perchè la KY_∞ non incontra C' in punti reali. La tangente a C' in P_1 si muta per la ω nella conica fondamentale osculatrice in K ad un ramo della Γ [2]. Ma la tangente in P_1 a C' passa per K (che è il polo della HY_∞), e quindi quella conica osculatrice si spezza nella HY_∞ e in una retta k per K, la quale ha in K tre intersezioni con il ramo predetto che pertanto vi presenta un flesso. L'analogo si può dire per l'altro ramo uscente da K e per i rami che hanno origine in H e in Y_∞. Poichè la ω subordina intorno a K l'involuzione ortogonale [3] la k è perpendicolare alla KP_1 e analogamente si comporta la tangente all'altro ramo. Si ritrovano così anche per questa via i risultati precedenti (cfr. § 7).

[1] Cfr., p. es., op. cit., in [1] n. 2, pag. 277.
[2] Cfr., p. es., op. cit., in [1] n. 2, pag. 283.
[3] Ciò deriva dal fatto che due dei punti uniti della ω cadono nei punti ciclici. Cfr., p. es, op. cit., in [1] n. 2, pag. 277.