Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Sansone

Su una disuguaglianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 221–223.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_221_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Su una disuguaglianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre.

Nota di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

Sunto: *Si dà una nuova dimostrazione di una disuguaglianza di* P. TURAN *e si perfeziona il risultato stabilendo una limitazione più forte.*

1. Sia $\{P_n(x)\}$, $P_0(x)=1$, $P_n(x)=2^{-n}(1/n\,!)[d^n(x^2-1)^n/dx^n]$, $(n=1, \ldots)$ la successione dei polinomi di LEGENDRE. P. TURÀN ha comunicato a G. SZEGÖ che per i polinomi $P_n(x)$ sussiste la seguente disuguaglianza

$$\Delta_n(x)=[P_n(x)]^2-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)\geq 0,\ n\geq 1,\ -1\leq x\leq 1, \tag{1}$$

di cui quest' ultimo Autore ha dato quattro brevi ed eleganti dimostrazioni (¹) fondate rispettivamente su un' espressione integrale di $\Delta_n(x)$ ottenuta con la formula integrale di MEHLER, sulla rappresentazione di $\Delta_n(x)$ linearmente per i polinomi $P_n(x)$, sulla relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{n\,!}z^n=e^{xz}J_0[(1-x^2)^{1/2}z]$$

dove J_0 è la funzione di BESSEL di ordine 0, e infine sulla relazione

$$P_0+\binom{n}{1}P_1(x)z+\ldots+\binom{n}{n}P_n(x)z^n=(1+2xz+z^2)^{n/2}P_n\left[\frac{1+xz}{(1+2xz+z^2)^{1/2}}\right].$$

(¹) G. SZEGÖ: *On an inequality of* P. TURÀN *concerning* LEGENDRE *polynomials,* « Bull. of the Am. Math. Soc. » 54(1948), pp. 401-405.

Ci proponiamo in questa nota, con l' uso delle più semplici proprietà dei polinomi di LEGENDRE, provare che sussiste la disuguaglianza

$$(2)\qquad (1-x^2)\Delta_n(x) > \frac{1}{2}\left[\int_x^1 P_n(x)dx\right]^2, \qquad n\geq 1, \qquad -1<x<1,$$

dalla quale segue senz' altro la (1).

Essendo $\Delta_n(x)$ un polinomio pari in x, di grado $2n$, basterà limitarci ai valori di x in $(0, 1)$, $0\leq x\leq 1$.

È facile verificare che sussiste l' identità

$$(3)\qquad (1-x^2)\Delta_n(x) - 3\int_x^1 x\Delta_n(x)dx - \frac{1}{2}\left[\int_x^1 P_n(x)dx\right]^2 = 0.$$

Essa è vera infatti per $x=1$ $[x=-1]$ e derivando, basterà allora provare che

$$(4)\qquad (1-x^2)\Delta'_n(x) + x\Delta_n(x) + P_n(x)\int_x^1 P_n(x)dx = 0.$$

Si ha (²)

$$(5)\qquad \frac{1-x^2}{n(n+1)}\frac{dP_n}{dx} = \int_x^1 P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}-P_{n+1}] = \frac{1}{n+1}[P_{n-1}-xP_n],$$

e la (4) diventa

$$(1-x^2)[2P_nP'_n - P_{n-1}P'_{n+1} - P_{n+1}P'_{n-1}] + x[P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1}] + \frac{P_n}{n+1}[P_{n-1}-xP_n] = 0,$$

e poichè per la (5) è $(1-x^2)P'_n = n(P_{n-1}-xP_n)$ si ha

$$(6)\qquad 2nP_n[P_{n-1}-xP_n]-(n+1)P_{n-1}[P_n-xP_{n+1}]-(n-1)P_{n+1}[P_{n-2}- - xP_{n-1}] + x[P_n^2-P_{n-1}P_{n+1}] + \frac{P_n}{n+1}[P_{n-1}-xP_n] = 0,$$

ma (³) $-(n-1)P_{n-2} = nP_n - (2n-1)xP_{n-1}$, e perciò la (6) riducendo e dividendo per $nP_n/(n+1)$ dà l' identità $nP_{n-1} - (2n+1)xP_n + (n+1)P_{n+1} = 0$.

Ora $\Delta_n(1)=0$, $\Delta'_n(1) = 2P'_n(1) - P'_{n+1}(1) - P'_{n-1}(1) = -1$, perciò

(²) Cfr. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (2ª ed., Bologna, 1946), p. 159, [(14), (13)].

(³) Cfr. G. SANSONE, op. cit. in (²), p. 158, [(13)].

per h positivo e sufficientemente piccolo quando $1-h \leq x < 1$ risulta $\Delta_n(x) > 0$. La (3) ci dà allora $\Delta_n(x) > 0$ per $0 \leq x < 1$: infatti se fosse α il primo zero a sinistra di 1 in (0, 1) di $\Delta_n(x)$, si avrebbe $\Delta_n(x) > 0$ per $\alpha < x < 1$, e dalla (3) si avrebbe

$$3\int_\alpha^1 x\Delta_n(x)\,dx + \frac{1}{2}\left[\int_x^1 P_n(x)dx\right]^2 = 0,$$

che è assurda.

Essendo $\Delta(x) > 0$ dalla (3) segue la (2).

2. È facile dare una limitazione per $\Delta_n(x)$. Si ha infatti a motivo delle (4) e (5),

$$\left[\Delta_n(x) + \frac{P^2_n(x)}{2n(n+1)}\right]' = \Delta'_n(x) + \frac{P_n(x)P'_n(x)}{n(n+1)} =$$

$$= \Delta'_n(x) + \frac{1}{1-x^2} P_n(x)\int_x^1 P_n(x)dx = -\frac{x}{1-x^2}\Delta_n(x),$$

e la funzione $\Delta_n(x) + P^2_n(x)/2n(n+1)$ è decrescente in (0, 1), e perciò la limitazione

$$\Delta_n(0) + \frac{P^2_n(0) - P^2_n(x)}{2n(2n+1)} > \Delta_n(x) > \frac{1-P^2_n(x)}{2n(2n+1)} > 0, \tag{7}$$

$$0 < |x| < 1, \quad n \geq 1.$$