Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 223–228.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_223_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi. (*)

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Determinazione dei vari casi che può presentare la configurazione delle rette di una superficie cubica in un qualunque corpo commutativo.*

1. Generalità. — La geometria algebrica classica si limita di solito allo studio delle varietà algebriche nel campo complesso; tuttavia i suoi metodi, opportunamente modificati ed estesi, possono anche sovente venir applicati alle varietà algebriche sopra un campo (o corpo commutativo) γ, purchè questo sia algebricamente

(*) Questa Nota è una parte della comunicazione tenuta dall'autore al 2° Congresso Matematico Austriaco, svoltosi ad Innsbruck dal 29 agosto al 2 settembre 1949. Ulteriori sviluppi sull'argomento si troveranno nel vol. II delle *Lezioni di Geometria moderna*.

chiuso, ottenendosi in tale ipotesi risultati generalmente non dissimili da quelli relativi al campo complesso. Le cose invece vanno assai diversamente se γ non è algebricamente chiuso; la ricerca viene allora ad assumere aspetti totalmente diversi e risulta spesso molto più difficile, come già appare dal caso particolare classico in cui γ sia il campo reale.

Le estensioni così adombrate costituiscono un campo di ricerca assai vasto ed attraente, in gran parte ancora completamente inesplorato, al quale sarebbe opportuno che i giovani matematici si dedicassero.

Qui mi limiterò a considerare un esempio abbastanza semplice, relativo alla configurazione delle rette giacenti su di una superficie cubica F dello spazio ordinario in un campo γ. Se F non possiede punti multipli in nessuna estensione di γ, e se γ ha caratteristica $\neq 2$ ed è algebricamente chiuso, allora F contiene sempre precisamente 27 rette aventi fra loro le proprietà di incidenza ben note nel campo complesso. Se però γ non è algebricamente chiuso, si ottengono complessivamente per il numero e per la configurazione delle rette di F appartenenti a γ dieci diverse possibilità, le quali risultano tutte realizzabili nel campo razionale, mentre invece soltanto quattro di esse possono aver luogo nel campo reale.

Passo ora ad indicare brevemente come questi risultati possono venir stabiliti e precisati.

2. **Determinazione delle rette di F.** — La determinazione delle rette di una superficie cubica F, definita in un campo γ, può venir effettuata, in γ od in una conveniente estensione algebrica di γ, col procedimento seguente, assai più semplice di quelli usuali. Consideriamo su F due punti semplici A, B, tali che i relativi piani tangenti α, β si seghino lungo una retta incontrante F in tre punti C_1, C_2, C_3 distinti, nessuno dei quali sia situato su di una retta di F. Il piano α (o β) sega F secondo una cubica unicursale, il cui punto P (o Q) può venir espresso razionalmente in funzione di un parametro p (o q); la condizione affinchè la retta PQ giaccia su F si traduce allora in due equazioni algebriche, dei gradi rispettivi 3, 6 e 6, 3 nelle p, q. Eliminando p. es. q fra queste, si ottiene un' equazione di grado $3\cdot 3 + 6\cdot 6 = 45$ nella p, la quale ammette come radici i tre valori di p che corrispondono ai punti C_1, C_2, C_3, ciascuna colla molteplicità 6. Soppresse tali radici, estranee al problema, si ricava un' equazione in p di grado $45 - 3\cdot 6 = 27$, dalla quale vien così a dipendere la determinazione delle rette di F. Si conclude che:

F contiene in ogni caso qualche retta, in γ od in un' estensione algebrica di γ. Il numero di tali rette non supera mai il 27, se si esclude che la superficie F risulti rigata.

3. Configurazione delle rette di F in un' opportuna estensione di γ. — Supposto ora che F sia priva di punti multipli e che γ abbia caratteristica $\neq 2$, consideriamo una qualunque retta r di F ed il fascio delle coniche segate ulteriormente su F dai piani per r. È subito visto che queste coniche incontrano r secondo coppie di una g_2^1 priva di punti fissi, e che la determinazione delle coniche degeneri del fascio suddetto dipende da una equazione di 5° grado nel parametro con cui possono razionalmente individuarsi i piani per r. Si prova inoltre che questa equazione è priva di radici multiple, e che ciascuna di quelle coniche degeneri si spezza in due rette distinte; più precisamente, nel caso particolare che γ abbia caratteristica 0, si può dimostrare che il discriminante di F vale $\Delta = DD_1^2$, dove D è il discriminante della suddetta equazione di 5° grado e $D_1 = 0$ traduce la condizione affinchè g_2^1 abbia un punto fisso (che allora risulta doppio per F). (1)

Dunque, nelle ipotesi attuali, ogni retta di F è incidente ad altre 10 rette di F, distribuite a coppie in 5 piani per r. Tanto basta per dedurre che:

In un' opportuna estensione algebrica di γ, la superficie F contiene precisamente 27 rette, la cui configurazione può venir caratterizzata dalle proprietà d' incidenza ben note nel caso che γ sia il campo complesso.

Questi risultati più non sussistono se F ammette qualche punto multiplo e, come vedremo, subiscono eccezioni anche se γ ha caratteristica 2 ed F è priva di punti multipli.

4. Rette di F in un campo γ arbitrario. — La determinazione e lo studio della configurazione delle rette di F in γ, nell' ipotesi che F sia priva di punti multipli e γ abbia caratteristica $\neq 2$, possono effettuarsi poggiando sulle seguenti tre osservazioni:

(*i*) Se F contiene due rette di γ fra loro incidenti, il piano di queste sega F ulteriormente secondo una *terza retta*, che pure appartiene a γ. Le rimanenti rette di F appartenenti a γ si distribuiscono a coppie in piani contenenti ciascuno una delle tre rette dianzi considerate, sicchè il numero complessivo delle rette di F in γ risulta *dispari*.

(1) La relazione $\Delta = DD_1^2$ può cadere in difetto se non si suppone che γ abbia caratteristica 0.

(*ii*) Se F contiene quattro rette di γ fra loro a due a due sghembe, queste ammettono due trasversali comuni, r', r'', fra loro distinte. Esiste una ed una sola bissestupla avente le r', r'' quali rette associate di sestuple differenti; e si ha che ciascuna delle rimanenti 15 rette di F appartiene a γ, mentre delle 12 rette di tale bissestupla nessuna o tutte appartengono a γ.

(*iii*) Se F contiene due terne di rette complanari di γ, i cui piani si seghino secondo una retta non situata su F, dette terne ne individuano una terza, pure costituita da tre rette complanari appartenenti ciascuna a γ, in modo che le nove rette considerate formino un sistema di STEINER.

Combinando opportunamente queste osservazioni, si deduce senza difficoltà che, relativamente al numero n ed alla configurazione delle rette di F appartenenti a γ, possono a priori soltanto presentarsi i 10 casi seguenti:

[1] $n = 27$, *non ottenendosi altre rette di* F *in nessuna estensione di* γ; [2] $n = 15$, *le 12 rette che* F *ulteriormente possiede in un' opportuna estensione di* γ *costituendo una bissestupla*; [3] $n = 9$, *le 9 rette formando un sistema di* STEINER; [4] $n = 7$, *una delle 7 rette essendo incidente alle altre 6, le quali si distribuiscono in 3 coppie di rette fra loro incidenti;* [5] $n = 5$, *una delle 5 rette essendo incidente alle altre 4, le quali si distribuiscono in 2 coppie di rette fra loro incidenti;* [6] $n = 3$, *le tre rette essendo complanari;* [7] $n = 3$, *le 3 rette essendo fra loro sghembe a 2 a 2;* [8] $n = 2$, *le 2 rette essendo sghembe;* [9] $n = 1$; [10] $n = 0$.

Aggiungasi che, note che siano 9 rette di F appartenenti a γ e formanti un sistema di STEINER, la determinazione delle rimanenti 18 rette di F può farsi dipendere da un' equazione cubica con coefficienti in γ; secondochè quest' equazione ammette in γ 3, 1 o 0 radici, la superficie F presenta il caso [1], [2], o [3].

5. Casi particolari, eccezioni ed applicazioni. — Se γ è il *campo reale,* soltanto quattro dei dieci casi di cui al n. 4 possono effettivamente presentarsi, e precisamente i casi [1], [2], [4], [6]. (1)

Ciascuno dei 10 casi contemplati nel n. 4 può invece aver luogo nel *campo razionale.* La realizzazione di modelli dei diversi tipi può ottenersi in varie guise, il modo più semplice provenendo dal definire F come superficie rappresentativa del sistema lineare ∞^3 delle cubiche di un piano passanti per sei punti 1, 2, 3, 4,

(1) Cfr. p. es. B. SEGRE, *The non-singular cubic surfaces* (Oxford, The Clarendon Press, 1942), § 23.

5, 6 ivi assegnati, il gruppo dei quali sia razionale (il che, naturalmente, non esige la razionalità dei singoli punti); i dieci casi in questione si presentano corrispondentemente alle varie possibili decomposizioni di quel gruppo in gruppi irriducibili nel campo razionale, com' è posto in luce dalla seguente tabella:

[1]: (1)(2)(3)(4)(5)(6),	[6]: (1, 2)(3, 4)(5, 6),
[2]: (1)(2)(3)(4)(5, 6),	[7]: (1)(2, 3)(4, 5, 6),
[3]: (1)(2)(3)(4, 5, 6),	[8]: (1)(2, 3, 4, 5, 6),
4]: (1)(2)(3, 4)(5, 6),	[9]: (1, 2)(3, 4, 5, 6),
[5]: (1)(2)(3, 4, 5, 6),	[10]: (1, 2, 3, 4, 5, 6) o (123)(456).

Rileviamo inoltre che i risultati dei nn. 3, 4 soffrono *eccezioni* nell' ipotesi che γ abbia *caratteristica 2*. Suppongasi ad esempio che γ sia il campo delle classi dei residui mod 2, talchè uno spazio lineare proiettivo (x, y, z, t) a tre dimensioni definito su γ risulta uno *spazio finito* contenente 15 punti e 35 rette (¹). Allora ciascuno di tali punti e ciascuna di tali rette giace sulla superficie cubica

$$xy(x + y) = zt(z + t),$$

la quale risulta tuttavia priva di punti multipli.

La superficie cubica

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x = 0$$

è pure priva di punti multipli, e contiene 11 punti e 13 rette (che sono i punti e le rette dei piani $x + z = 0$ e $y + t = 0$).

Infine la superficie cubica

$$x^2y + y^2z + z\,t + t^2x + xyz = 0$$

è priva di punti multipli ed ammette in γ complessivamente 9 punti e 6 rette.

Aggiungasi da ultimo che, mediante un' opportuna estensione del metodo di GEISER, dai precedenti risultati sulle superficie cubiche se ne deducono altri consimili relativi alle *bitangenti delle quartiche piane di genere 3* in un qualunque campo γ di caratteristica $\neq 2$. Se γ è algebricamente chiuso, le bitangenti sono in numero di 28 e formano una configurazione del tutto analoga a quella ben nota nel campo complesso. Altrimenti il numero

(¹) Cfr. p. es. B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I Zanichelli, 1948), § 17.

delle bitangenti può soltanto assumere uno dei valori

$$n = 28,\ 16,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.\ 0.$$

Per $n = 4$ si hanno due casi da distinguere, secondochè le 4 bitangenti di γ risultano a 3 a 3 sizigetiche od azigetiche; invece per ciascuno degli altri valori di n la configurazione delle n bitangenti ha una struttura univocamente definita ed agevolmente precisabile. Complessivamente si ottengono così *undici distinte possibilità*, ciascuna delle quali può venir realizzata nel campo razionale.