Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Stampacchia

Un'osservazione su un problema ai limiti per l'equazione: $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 235–239.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Un' osservazione su un problema ai limiti per l' equazione: $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Nota di GUIDO STAMPACCHIA (a Napoli).

Sunto. - *Si mostra che, sotto determinate ipotesi, la risoluzione del problema in questione é riportata a quella di un ordinario problema ai limiti per un' equazione di ordine* n + 1.

1. Il problema di determinare un valore $\bar{\lambda}$ tale che un integrale dell' equazione:

$$y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

per $\lambda = \bar{\lambda}$, soddisfi a condizioni atte ad individuare un polinomio di grado n [1] è stato oggetto recentemente di alcuni interessanti

[1] Il problema è stato posto da K. ZAWISKA: cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna (1941) v. II, cap. VIII, 4.

lavori di G. ZWIRNER [1] e di F. CAFIERO [2], per valori particolari di n, e di E. MAGENES, per il caso generale [3].

A proposito di questo problema si può domandare se l'equazione (1) non possa pensarsi come un integrale primo [4] di una equazione differenziale di ordine $n+1$. La questione, così posta, mi ha permesso di giungere ad un risultato che, pur essendo particolare, per quanto riguarda le ipotesi qualitative richieste sulla funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ [5], si ottiene molto semplicemente e non sembra fuori delle applicazioni concrete.

2. Enunciamo intanto questo lemma [6]:

Sia $y(x)$ *una funzione definita in* (a, b), *con derivate fino all'ordine* n *assolutamente continue, che soddisfa alla disuguaglianza:*

$$
(2) \qquad \begin{aligned} | y^{(n+1)}(x) | \leq \{ & \omega_{n-1}(y^{(n-1)}(x)) \, | y^{(n)}(x) | + \omega_{n-2}(y^{(n-2)}) \, | y^{(n-1)}(x) | + \\ & + \ldots \omega_0(y(x)) \, | y'(x) | + \varphi(x) \} \, | y^{(n)}(x) | \end{aligned}
$$

con $\omega_0(u), \omega_1(u), \ldots, \omega_{n-1}(u)$ *funzioni non negative, integrabili sull'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *e* $\varphi(x)$ *funzione non negativa integrabile in* (a, b).

Detto, allora, a' *un punto qualsiasi di* (a, b) *si ha:*

$$
(3) \qquad | y^{(n)}(x) | \leq | y^{(n)}(a') | \, H
$$

ove H *è un numero positivo, dipendente soltanto dalle funzioni*

[1] G. ZWIRNER, *Sull'equazione* $y' = \lambda f(x, y)$, Rend. Sem. Mat. di Padova (XV) (1946) pp. 33-39; *Alcuni teoremi sulle equazioni differenziali dipendenti da un parametro.* Annali Università di Trieste (1947).

[2] F. CAFIERO, *Su un problema ai limiti relativo all'equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$ Giornale di Matematiche s. IV vol. 77, pp. 145-163.

[3] E. MAGENES, *Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale:* $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, Annali di Matematica s. IV to. XXVII (1948).

[4] Nel senso usato nella teoria classica delle equazioni differenziali.

[5] Allo stato attuale, nello studio dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali in forma ordinaria si suppone, per lo più, che la funzione che compare a secondo membro soddisfi alle condizioni di CHARATHÉODORY. Non escludo, per altro, che qualche opportuno procedimento di approssimazione possa permettere di attenuare le ipotesi che pongo in questa Nota sulla $f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$.

[6] A proposito di questo lemma si veda: L. TONELLI, *Sull'equazione differenziale:* $y = f(x, y, y')$, Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa v. VIII (1939) pp. 75-88 n. 6 e S. CINQUINI, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine* n. Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa v. IX (1940) pp. 61-67 « nota 12 ».

$\omega_i(u)(i=0, 1, \dots, n-1)$ *e da* $\varphi(x)$. *In particolare, se la funzione* $y^{(n)}(x)$ *si annulla per un valore di* (a, b), *si annulla identicamente in* (a, b).

Infatti se $y^{(n)}(x)$ non si annulla mai in (a, b), supposto ad esempio: $y^{(n)}(x) > 0$, si ha dalla (2)

$$\int_{a'}^{x} \frac{y^{(n+1)}(x)}{y^{(n)}(x)} dx \leq \int_{a'}^{x} [\omega_{n-1}(y^{(n-1)}(x)) y^{(n)}(x) + \omega_{n-2}(y^{(n-2)}(x)) \mid y^{(n-1)}(x) \mid + \\ + \dots + \omega_0(y(x)) \mid y'(x) \mid + \varphi(x)] dx$$

e poichè $y^{(i)}(x)$ cambia segno in $(a. b)$ al più $n-i$ volte segue, per un noto teorema di integrazione per sostituzione:

$$\int_{y^{(n)}(a')}^{y^{(n)}(x)} \frac{du}{u} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} [\omega_{n-1}(u) + 2\omega_{n-2}(u) + \dots n\omega_0(u)] du + \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Di qui si deduce che deve esistere una costante $H > 0$, tale che valga la (3).

Se d' altra parte, $y^{(n)}(x)$ si annullasse in un punto senza annullarsi identicamente, in (a, b) sarebbe possibile determinare un intervallo $(\xi, \xi+\delta)$ tale che: $y^{(n)}(\xi) = 0$ e per $\xi < x \leq \xi + \delta$: $y^{(n)}(x) > 0$; ripetendo le considerazioni precedenti sull' intervallo $(\xi+\varepsilon, \xi+\delta)$ $(\varepsilon > 0)$ si troverebbe:

$$\int_{y^{(n)}(\xi+\varepsilon)}^{y^{(n)}(x)} \frac{du}{u} \leq H$$

e ciò è assurdo, perchè tendendo ε a zero il primo membro tende all' infinito.

3. *Sia* $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *una funzione continua nello strato* S:

$$S: \quad a \leq x \leq b \qquad \mid y^{(i)} \mid < +\infty \qquad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad [y^{(0)} = y]$$

ed ivi positiva. In S *la funzione* $f(x, y, y', \dots, x^{(n-1)})$ *sia anche dotata di derivate parziali prime continue tali che in* S *si abbia:*

$$(4) \qquad \left| \frac{\partial \log f}{\partial x} \right| \leq \varphi(x) \qquad \left| \frac{\partial \log f}{\partial y^{(i)}} \right| \leq \omega_i(y^{(i)}) \qquad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

con $\varphi(x)$ *funzione non negativa ed integrabile in* (a, b) *e* $\omega_i(u)$ $(i=0, 1, \dots, n-1)$ *funzioni continue non negative ed integrabili in* $(-\infty, +\infty$.

Allora, se (x_j, y_j) $(j=1, 2, \dots, n+1)$ *sono* n + 1 *punti del piauo* (x, y) *tali che* $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, *esiste almeno un valore* $\bar{\lambda}$ *ed una funzione* $y = y(x)$, *continua con le derivate fino* *all' ordine* n + 1, *che soddisfa l'equazione (1), per* $\lambda = \bar{\lambda}$, *e le condizioni*. [1]

$$y(x_j) = y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{5}$$

Invero, l' equazione differenziale:

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{y^{(n)}}{f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}[f_x + f_y y' + \ldots + f_{y^{(n-1)}} y^{(n)}] = \\ &= y^{(n)}\left[\frac{\partial \log f}{\partial x} + \frac{\partial \log f}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \log f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

ammette almeno un integrale $y = y(x)$ passante per gli $n + 1$ punti fissati. [2] Per il lemma precedente segue che se $y^{(n)}(x)$ si annulla in un punto, si annulla identicamente e quindi soddisfa l' equazione (1) per $\lambda = 0$. Se invece $y^{(n)}$ non si annulla in (a, b), e quindi mai, dalla (6) si ricava:

$$\frac{y^{(n+1)}(x)}{y^{(n)}(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))}{f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)}$$

Di qui, integrando si deduce che esiste un valore $\lambda = \bar{\lambda}$, diverso da zero, tale che:

$$y^{(n)}(x) = \bar{\lambda} f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{1'}$$

e la funzione $y = y(x)$ soddisfa alle condizioni (5).

Osserviamo che, se $y_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ l' unico valore soddisfacente al problema è: $\lambda = 0$; infatti deve allora esserci almeno un punto ξ di (a, b) per cui $y^{(n)}(\xi) = 0$ e quindi $y^{(n)}(x) \equiv 0$. [3]

Di più osserviamo che si può maggiorare il valore di $\bar{\lambda}$ indipendentemente dalla soluzione; infatti si può maggiorare il modulo della $y^{(n)}(x)$ in un punto ξ di (a, b) in funzione dei valori ai limiti [4] ed allora dalla (1') e per la (3), detto k il minimo > 0 di $f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ per $a \leq x \leq b$, $|y^{(i)}| < L$, con L numero opportuno, [5] si ha:

$$|\bar{\lambda}| = \frac{|y^{(n)}(x)|}{f(x, y_{(x)}, \ldots, y^{(n-1)}(x))} \leq \frac{L}{k}$$

(1) La tesi di questo teorema continua a valere anche se si richiede che la funzione $y = y(x)$ soddisfi a condizioni atte a determinare un polinomio di grado n.

(2) Cfr. S. Cinquini. loc. cit. § 2.

(3) In generale, non si può assicurare che nelle ipotesi poste vi sia una sola soluzione $y = y(x)$ per il problema considerato, dato che la equazione (6) non ammette in generale un unico integrale soddisfacente alle condizioni ai limiti poste.

(4) Cfr. S. Cinquini, loc. cit. nota (12).

(5) Che si può determinare in base al lemma dimostrato e alle condizioni ai limiti cfr. loc. cit. in (2).

4. Accenniamo ora, brevemente, alla possibilità di ridurre le ipotesi fatte sulla funzione: $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Supponiamo, invero. che la funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ risulti continua in tutto lo strato S ivi positiva e che in luogo della (4) siano verificate in S le seguenti relazioni:

$$f(x, y, \dots . y^{(n-1)})e^{-\varphi(x) \mid \tilde{x}-x \mid} \leq$$
$$\leq f(\tilde{x}, y, \dots, y^{(n-1)}) \leq f(x, y, \dots, y^{(n-1)})e^{\varphi(x) \mid \tilde{x}-x)}$$
$$f(x, y, \dots, y^{(i-1)}, y^{(i)}, \dots, y^{(n-1)})e^{-\omega_i(y) \mid \tilde{y^{(i)}}-y^{(i)} \mid} \leq$$
$$\leq f(x, y, \dots, y^{(i-1)}, \tilde{y}^{(i)}, y^{(i+1)}, \dots . y^{(n-1)}) \leq$$
$$\leq f(x, y, \dots, y^{(i)}, \dots, y^{(n-1)})e^{\omega_i(y) \mid \tilde{y}^{(i)}-y^{(i)} \mid} \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

con $\varphi(x)$, $\omega_i(u)(i = 0, 1, \dots, n-1)$ funzioni continue, non negative, integrabili la prima in (a, b) e le altre in $(-\infty, +\infty)$.

Approssimiamo in tutto S la funzione $f(x, y, y' \dots, y^{(n-1)})$ mediante le funzioni: (1)

$$\exp . \frac{1}{(2h_m)^{n+1}} \int_{-h_m}^{h_m} \int_{-h_m}^{h_m} \dots \int_{-h_m}^{h_m} \log f(x+\xi, y+\eta_0, \dots, y^{(n-1)}+\eta_{n-1}) d\xi d\eta_0, \dots d\eta_{n-1}$$
$$= f_m(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

ove $h_m = \dfrac{1}{m}$.

Si ha facilmente:

$$\left| \frac{\partial \log f_m}{\partial x^{(i)}} \right| \leq \varphi(x) \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial \log f_m}{\partial y^{(i)}} \right| \leq \omega_i(y_i).$$

Allora per ogni equazione:

$$y^{(n)} = \lambda f_m(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

esiste una soluzione $[\lambda_m . y_m(x)]$ soddisfacente alle condizioni ai limiti poste; di più esistono due costanti positive L e Λ tali che:

$$\mid y_m^{(n)}(x) \mid < L \qquad \mid \lambda_m \mid < \Lambda .$$

Ciò ci assicura che è possibile estrarre una successione $[\lambda_{m_r}, y_{m_r}]$ che tende ad una soluzione $[\bar{\lambda}, y(x)]$ dell' equazione (1) e che soddisfa le condizioni ai limiti poste.

(1) Cfr. L. Tonelli, *Sulla definizione di funzioni di due variabili a variazione limitata*. Rend. Acc. Naz. Lincei V. VII (1928) p. 357, S. Cinquini, loc. cit. e E. Magenes, *Sopra un problema di* T. Satô *per l'equazione differenziale* $y' = f(x, y, y')$. Rend. Naz. Lincei s. VIII v. II p. 259. Definiamo la funzione $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ anche per $x < a$ ponendo $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(a, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ e per $x > b$ ponendo $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(b, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.