Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Gatteschi

Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 240–250.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_240_0>

Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di Legendre.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Si stabilisce una formula asintotica per il calcolo dell'* r*-esimo zero del polinomio* $P_n(x)$ *di* LEGENDRE *quando* $n \geq 4$, $[(n+2)/6]+1 \leq r \leq [n/2]$ *e se ne valuta l'errore.*

Recentemente F. TRICOMI in una sua Memoria (1) ha dato un metodo per la ricerca degli zeri delle funzioni di cui si conosca una rappresentazione asintotica, e ne ha fatta applicazione alla determinazione degli zeri dei polinomi di LEGENDRE.

Noi abbiamo ripresa la questione per la valutazione dell'errore e siamo giunti al seguente risultato:

Indichi ξ_r *l'* r*-esimo zero del polinomio* $P_n(x)$ *di Legendre, allora, quando sia*

$$n \geq 4, \ (^2) \quad \left[\frac{n+2}{6}\right]+1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

vale la seguente formula

$$\xi_r = x_r\left[1 - \frac{2n+7}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right] + \varepsilon,$$

dove

$$x_r = \cos\frac{4r-1}{4n+2}\pi, \quad |\varepsilon| < \frac{54}{10n^4} \ (^3).$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(1) F. TRICOMI, *Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica*, « Annali di Matematica », (4), 26, 1947, pp. 283-300.

(2) Basta riferirci al caso $n \geq 4$ perchè da $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, gli zeri di P_1, P_2, P_3 si ottengono subito elementarmente.

(3) Nella sopracitata Memoria è data, per l'r-esimo zero x_r^* di $P_n(x)$ la seguente formula

$$x_r^* = x_r\left[1 - \frac{1}{2(2n+1)(2n-3)}\right] + O(n^{-4}), \qquad \left(x_r = \cos\frac{4r-1}{4n+2}\pi\right),$$

che ci sembra debba così modificarsi

$$x_r^* = x_r\left[1 - \frac{2n-5}{2(4n^2-1)(2n-3)}\right] + O(n^{-4}).$$

1. Si consideri la formula di approssimazione asintotica di STIELTJES [1] per l'n-esimo polinomio di LEGENDRE $P_n(\cos\vartheta)$ e si prenda per valore approssimato la somma dei primi tre termini.

Avremo

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{4(2n)!!}{\pi(2n+1)!!\,(2\operatorname{sen}\vartheta)^{\frac{1}{2}}} f_n(\vartheta)$$

con

$$f_n(\vartheta) = \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right\} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n+3}\,\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\vartheta - \frac{3}{4}\pi\right\}}{2\operatorname{sen}\vartheta} + \tag{1}$$

$$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1\cdot 3}{(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\vartheta - \frac{5}{4}\pi\right\}}{4\operatorname{sen}^2\vartheta} + R_3(\vartheta),$$

$$|R_3(\vartheta)| < \frac{3^2\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 6(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cdot\frac{2}{(2\operatorname{sen}\vartheta)^3} \qquad 0<\vartheta<\pi. \tag{2}$$

Posto,

$$\left\{\begin{aligned} & g_0(\vartheta) = \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right\}, \quad g_1(\vartheta) = \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\vartheta - \frac{3}{4}\pi\right\}}{\operatorname{sen}\vartheta}, \\ & g_2(\vartheta) = \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\vartheta - \frac{5}{4}\pi\right\}}{\operatorname{sen}^2\vartheta}; \\ & a_1 = \frac{n}{2(2n+3)}, \quad a_2 = \frac{9n^2}{8(2n+3)(2n+5)}, \quad \mu = \frac{1}{2n}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

la (1) diviene

$$f_n(\vartheta) = g_0(\vartheta) + a_1 g_1(\vartheta)\mu + a_2 g_2(\vartheta)\mu^2 + R_3(\vartheta). \tag{4}$$

Per la formula di TAYLOR arrestata alla derivata terza abbiamo

$$g_0[\vartheta + v_0(\vartheta)\mu + v_1(\vartheta)\mu^2] = g_0(\vartheta) + \frac{v_0(\vartheta)\mu + v_1(\vartheta)\mu^2}{1!}\,g_0'(\vartheta) +$$

$$+\frac{[v_0(\vartheta)\mu + v_1(\vartheta)\mu^2]^2}{2!}\,g_0''(\vartheta) + \frac{[v_0(\vartheta)\mu + v_1(\vartheta)\mu^2]^3}{3!}\,g_0'''(\bar{\vartheta}),$$

con $\bar{\vartheta}$ compreso fra ϑ e $\vartheta + v_0(\vartheta)\mu + v_1(\vartheta)\mu^2$.

(1) T. J. STIELTJES. *Sur les polynômes de Legendre*, « Ann. Fac. Sciences de Toulose », 4, 1890, pp. 1-17; Oeuvres, II, pp. 236-252.

Cfr. anche G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 2ª ed., Bologna, 1946, p. 188.

Posto

$$v_0(\mathfrak{z}) = a_1 \frac{g_1(\mathfrak{z})}{g_0'(\mathfrak{z})}, \quad v_1(\mathfrak{z}) = a_2 \frac{g_2(\mathfrak{z})}{g_0'(\mathfrak{z})} - \frac{a_1^2[g_1(\mathfrak{z})]^2 g_0''(\mathfrak{z})}{2[g_0'(\mathfrak{z})]^3}, \tag{5}$$

risulta

$$g_0[\mathfrak{z} + v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2] = g_0(\mathfrak{z}) + a_1 g_1(\mathfrak{z})\mu + a_2 g_2(\mathfrak{z})\mu^2 + H(\mathfrak{z}) \tag{6}$$

con

$$H(\mathfrak{z}) = v_0(\mathfrak{z}) v_1(\mathfrak{z}) g_0''(\mathfrak{z})\mu^3 + \frac{[v_1(\mathfrak{z})]^2}{2} g_0''(\mathfrak{z})\mu^4 + \frac{[v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2]^3}{3!} g_0'''(\bar{\mathfrak{z}}). \tag{7}$$

2. *Zeri di* $g_0[\mathfrak{z} + v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2]$. Siano $\mathfrak{z}_r$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$ gli zeri di $g_0(\mathfrak{z})$, si abbia cioè

$$\mathfrak{z}_r = \frac{4r-1}{4n+2}\pi, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n); \tag{8_1}$$

allora, se $\mathfrak{z}_r^*$ è tale che

$$\mathfrak{z}_r^* + v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2 = \mathfrak{z}_r, \tag{8_2}$$

risulta anche

$$g_0[\mathfrak{z}_r^* + v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2] = 0.$$

Da

$$\mathfrak{z}_r^* = \mathfrak{z}_r - v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu - v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2$$

abbiamo, per il teorema degli accrescimenti finiti,

$$v_1(\mathfrak{z}_r^*) = v_1(\mathfrak{z}_r) - [v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2] v_1'(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}_r),$$

con $\bar{\bar{\mathfrak{z}}}_r$ compreso fra $\mathfrak{z}_r^*$ e $\mathfrak{z}_r$; quindi

$$v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2 = v_1(\mathfrak{z}_r)\mu^2 - H_1(\mathfrak{z})$$

con

$$H_1(\mathfrak{z}) = \mu^2[v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2] v_1'(\bar{\bar{\mathfrak{z}}}_r). \tag{9}$$

Analogamente

$$v_0(\mathfrak{z}_r^*) = v_0(\mathfrak{z}_r) - \frac{v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2}{1!} v_0'(\mathfrak{z}_r) + \frac{[v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2]^2}{2!} v_0''(\bar{\bar{\bar{\mathfrak{z}}}}_r),$$

con $\bar{\bar{\bar{\mathfrak{z}}}}_r$ compreso fra $\mathfrak{z}_r^*$ e $\mathfrak{z}_r$, da cui

$$v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu = \frac{v_0(\mathfrak{z}_r)\mu}{1 + \mu v_0'(\mathfrak{z}_r)} - H_2(\mathfrak{z}),$$

dove abbiamo posto

$$H_2(\mathfrak{z}) = \frac{-\mu}{1 + \mu v_0'(\mathfrak{z}_r)} \left\{ \frac{[v_0(\mathfrak{z}_r^*)\mu + v_1(\mathfrak{z}_r^*)\mu^2]^2}{2!} v_0(\bar{\bar{\bar{\mathfrak{z}}}}_r) - v_1(\mathfrak{z}_r^*) v_0'(\mathfrak{z}_r)\mu^2 \right\}. \tag{10}$$

Risulta allora

$$\mathfrak{z}_r^* = \mathfrak{z}_r - \frac{v_0(\mathfrak{z}_r)\mu^2}{1 + \mu v_0'(\mathfrak{z}_r)} - v_1(\mathfrak{z}_r)\mu^2 + H_1(\mathfrak{z}) + H_2(\mathfrak{z}),$$

e se poniamo anche

$$H_3(\mathfrak{z}) = -\frac{v_0(\mathfrak{z}_r)[v_0'(\mathfrak{z}_r)]^2\mu^3}{1+\mu v_0'(\mathfrak{z}_r)}, \tag{11}$$

si ha

$$\mathfrak{z}_r^* = \mathfrak{z}_r - v_0(\mathfrak{z}_r)\mu + [v_0(\mathfrak{z}_r)v_0'(\mathfrak{z}_r) - v_1(\mathfrak{z}_r)]\mu^2 + H_1(\mathfrak{z}) + H_2(\mathfrak{z}) + H_3(\mathfrak{z}). \tag{12}$$

Effettuando i relativi calcoli si trova

$$g_0'(\mathfrak{z}_r) = -(-1)^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{13$_1$}$$ $$g_0''(\mathfrak{z}_r) = 0, \tag{13$_2$}$$

$$g_0'''(\mathfrak{z}_r) = (-1)^{r+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)^3; \tag{13$_3$}$$

$$g_1(\mathfrak{z}_r) = \frac{(-1)^{r+1}\cos\mathfrak{z}_r}{\operatorname{sen}\mathfrak{z}_r}, \tag{14$_1$}$$

$$g_1'(\mathfrak{z}_r) = (-1)^{r+1}\frac{-\left(n+\frac{3}{2}\right)\operatorname{sen}^2\mathfrak{z}_r - \cos^2\mathfrak{z}_r}{\operatorname{sen}^2\mathfrak{z}_r}; \tag{14$_2$}$$

$$g_2(\mathfrak{z}_r) = (-1)^{r+1}2\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r; \tag{15}$$

$$v_0(\mathfrak{z}_r) = \frac{-n\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r}{(2n+1)(2n+3)}, \tag{16$_1$}$$

$$v_0'(\mathfrak{z}_r) = \frac{n}{2(2n+1)} + \frac{n\operatorname{cotg}^2\mathfrak{z}_r}{(2n+1)(2n+3)}; \tag{16$_2$}$$

$$v_1(\mathfrak{z}_r) = \frac{-9n^2\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)}; \tag{17}$$

e sostituendo nella (12), posto

$$H_4(\mathfrak{z}) = \frac{-\operatorname{cotg}^3\mathfrak{z}_r}{4(2n+1)^2(2n+3)^2}, \tag{18}$$

$$H_5(\mathfrak{z}) = \frac{-\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r}{2(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)}, \tag{19}$$

si ottiene per $r = 1, 2, \dots, n$

$$\mathfrak{z}_r^* = \mathfrak{z}_r + \frac{2n+7}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r + K(\mathfrak{z}), \tag{20}$$
$$K(\mathfrak{z}) = H_1(\mathfrak{z}) + H_2(\mathfrak{z}) + H_3(\mathfrak{z}) + H_4(\mathfrak{z}) + H_5(\mathfrak{z}).$$

3. *Limitazioni di $\mathfrak{z}_r^*$ e di* K($\mathfrak{z}$), H($\mathfrak{z}$), R$_3$($\mathfrak{z}$) *per*

$$\left[\frac{n+2}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{10n+5}{12}\right] - 1 \qquad \text{ed} \qquad n \geq 4. \tag{21}$$

ostriamo preliminarmente che, nell'ipotesi (21), vale per $\mathfrak{z}_r^*$

la limitazione

(22) $$\vartheta_r < \vartheta_r^* < \vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2}.$$

È infatti, come facilmente si prova,

$$\vartheta_r + v_0(\vartheta_r)\mu + v_1(\vartheta_r)\mu^2 < \vartheta_r,$$

$$\vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2} + v_0\left(\vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2}\right)\mu + v_1\left(\vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2}\right)\mu^2 > \vartheta_r;$$

esiste quindi un valore ϑ_r^* in $(\vartheta_r, \vartheta_r + \pi/(4n+2))$ che soddisfa alla (22) e per il quale si ha

$$\vartheta_r^* + v_0(\vartheta_r^*)\mu + v_1(\vartheta_r^*)\mu^2 = \vartheta_r.$$

Dalla (22) risulta

(23) $$\left|\operatorname{sen}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta_r^* - \frac{\pi}{4}\right\}\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

e abbiamo anche

(24) $$\operatorname{sen}\vartheta > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cotg}\vartheta < \sqrt{3} \quad \text{per} \quad \vartheta_r < \vartheta < \vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2}.$$

Tenuto conto della (23) e della (24) si trova

$$|v_0(\vartheta_r^*)| < \frac{\sqrt{2}}{2n}, \qquad |v_1(\vartheta_r^*)| < \frac{3\sqrt{2}}{2n}.$$

Essendo, come abbiamo detto nel n. 2, $\bar{\bar{\vartheta}}_r$ e $\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_r$ compresi fra ϑ_r e ϑ_r^* valgono per $\operatorname{sen}\bar{\bar{\vartheta}}_r$, $\operatorname{cotg}\bar{\bar{\vartheta}}_r$, $\operatorname{sen}\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_r$, $\operatorname{cotg}\bar{\bar{\bar{\vartheta}}}_r$ le stesse limitazioni (23), (24) e si ha, per $n \geq 4$,

$$|v_1'(\bar{\bar{\vartheta}}_r)| < 5\sqrt{2}, \ |v_0''(\bar{\bar{\bar{\vartheta}}})| < 10n, \ |v_0(\vartheta_r)| < \frac{1}{2n}, \ |v_0'(\vartheta_r)| < \frac{1}{2},$$

$$|H_1(\vartheta)| < \frac{7}{8n^4}, \qquad |H_2(\vartheta)| < \frac{4}{3n^4} + \frac{3}{32n^4}, \qquad |H_3(\vartheta)| < \frac{1}{60n^4},$$

$$|H_4(\vartheta)| < \frac{3\sqrt{3}}{64n^4}, \qquad |H_5(\vartheta)| < \frac{1}{16n^4},$$

quindi

(25) $$|K(\vartheta)| < \frac{5}{2n^4},$$

Si hanno inoltre per $H(\vartheta)$ e $R_3(\vartheta)$ le limitazioni

(26) $$|H(\vartheta)| < \frac{5}{2^4 n^3},$$

(27) $$|R_3(\vartheta)| < \frac{75}{2^3(2n+3)(2n+5)(2n+7)}.$$

4. Posto

$$g(\mathfrak{z}) = g_0(\mathfrak{z}) + a_1 g_1(\mathfrak{z})\mu + a_2 g_2(\mathfrak{z})\mu^2, \tag{28}$$

si ottiene

$$g'(\mathfrak{z}) = A \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{z} - \frac{\pi}{4}\right\} - B \operatorname{sen}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{z} - \frac{\pi}{4}\right\}, \tag{29}$$

dove

$$A = \frac{1}{8}\operatorname{cotg}\mathfrak{z} + \frac{\operatorname{cotg}\mathfrak{z}}{32(2n+3)} + \frac{9\operatorname{cotg}^3\mathfrak{z}}{16(2n+3)(2n+5)} - \tag{30}$$

$$- \frac{9\operatorname{cotg}\mathfrak{z}}{16(2n+3)(2n+5)},$$

$$B = \frac{2n+1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{9}{64(2n+3)} +$$

$$+ \left[\frac{1}{4(2n+3)} - \frac{9}{64(2n+3)} + \frac{9}{8(2n+3)(2n+5)}\right]\operatorname{cotg}^2\mathfrak{z},$$

e, quando

$$\mathfrak{z}_r < \mathfrak{z} < \mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}, \qquad \text{cioè} \qquad \mathfrak{z} = \frac{4r-1-\varepsilon}{4n+2}\pi, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1,$$

risulta

$$A > 0, \qquad B > 0$$

$$\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{z} - \frac{\pi}{4}\right\} = (-1)^r \operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{4}\pi, \quad \operatorname{sen}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{z} - \frac{\pi}{4}\right\} =$$

$$= (-1)^{r+1}\cos\frac{\varepsilon}{4}\pi.$$

Abbiamo allora

$$|g'(\mathfrak{z})| = A \operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{4}\pi + B\cos\frac{\varepsilon}{4}\pi > \frac{B\sqrt{2}}{2},$$

quindi

$$|g'(\mathfrak{z})| > \frac{8n+5}{8}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{31}$$

Si ha inoltre nello stesso intervallo $(\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$ per $n \geq 4$

$$|g'(\mathfrak{z})| < n+1. \tag{32}$$

5. *Esistenza di uno zero* $\mathfrak{z}_r^0$ *di* $g(\mathfrak{z})$ *nell'intervallo* $(\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$.

Tenendo presenti la (14_1) e la (15) si ha

$$g(\mathfrak{z}_r) = \frac{(-1)^{r+1}\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r}{4(2n+3)}\left[1 + \frac{9}{4(2n+5)}\right],$$

ed osservando che è

$$\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right) - \frac{\pi}{4}\right\} = -(-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{sen}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right) - \frac{\pi}{4}\right\} = (-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

abbiamo

$$g\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right) = -(-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\,C,$$

con

$$C = 1 + \frac{1}{4(2n+3)} - \frac{\operatorname{cotg}\left(\mathfrak{z}_r + \dfrac{\pi}{4n+2}\right)}{4(2u+3)} -$$

$$- \frac{9\left[\operatorname{cotg}^2\left(\mathfrak{z}_r + \dfrac{\pi}{4n+2}\right) - 1 + 2\operatorname{cotg}\left(\mathfrak{z}_r + \dfrac{\pi}{4n+2}\right)\right]}{32(2n+3)(2n+5)} > 0.$$

Ne segue

$$g(\mathfrak{z})_r \cdot g\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right) < 0$$

ed esiste allora almeno uno zero $\mathfrak{z}_r^0$ di $g(\mathfrak{z})$ nell'intervallo $(\mathfrak{z}_r,\ \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$.

6. *Limitazione di* $g(\mathfrak{z})$ *nei punti* $\mathfrak{z}_r$ *e* $\mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2)$, *e limitazione di* $|\,\mathfrak{z}_r^* - \mathfrak{z}_r^0\,|$.

Da

$$\mathfrak{z}_r = \frac{4r-1}{2n+1}\,\frac{\pi}{2},$$

segue che per n pari, $n = 2k$, e qualunque sia r, è $(4r-1)/(2n+1) \neq 1$, mentre per n dispari, $n = 2k+1$, è $(4r-1)/(2n+1)$ per $r = [n/2]+1$.

Si escluda quest'ultimo caso, cioè si prenda

$$r \leq \left[\frac{n}{2}\right], \tag{33}$$

risulta allora

$$\operatorname{cotg}\mathfrak{z}_r > \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1} > \frac{\pi}{2n+1},$$

e ne segue

$$|\,g(\mathfrak{z}_r)\,| > \frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)}, \tag{34$_1$}$$

$$\left|\,g\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right)\right| > \frac{23\sqrt{2}}{48}. \tag{34$_2$}$$

Possiamo ora migliorare la limitazione degli zeri $\mathfrak{z}_r^0$ di $g(\mathfrak{z})$ compresi in $(\mathfrak{z}_r,\ \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$. Infatti, essendo

$$g(\mathfrak{z}_r) = (\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_r^0)\,g'(\underline{\mathfrak{z}}), \qquad \text{con} \qquad \mathfrak{z}_r < \underline{\mathfrak{z}} < \mathfrak{z}_r^0,$$

dalla (34_1) e dalla (32) abbiamo

$$\frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)} < |\,\mathfrak{z}_r - \mathfrak{z}_r^0\,|\,(n+1),$$

da cui

$$\mathfrak{z}_r^0 - \mathfrak{z}_r > \frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)(n+1)}.$$

Analogamente

$$g\left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2}\right) = \left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2} - \mathfrak{z}_r^0\right) g'(\underline{\mathfrak{z}}), \quad \mathfrak{z}_r^0 < \underline{\mathfrak{z}} < \mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2},$$

e dalla (34_1) e dalla (32) segue

$$\frac{23\sqrt{2}}{48} < \left(\mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2} - \mathfrak{z}_r^0\right)(n+1),$$

cioè

$$\mathfrak{z}_r - \frac{\pi}{4n+2} - \mathfrak{z}_r^0 > \frac{23\sqrt{2}}{48(n+1)},$$

e quindi per tutti gli zeri di $g(\mathfrak{z})$ compresi in $(\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$, [uno almeno esistente per il n. 5], vale la limitazione

$$(35) \quad \mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)(n+1)} < \mathfrak{z}_r^0 < \mathfrak{z}_r + \frac{\pi}{4n+2} - \frac{23\sqrt{2}}{48(n+1)}.$$

Riprendiamo ora la (6) che, per la posizione (28), diviene

$$g_0[\mathfrak{z} + v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2] = g(\mathfrak{z}) + H(\mathfrak{z})$$

e si ha

$$g_0[\mathfrak{z} + v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2] = (\mathfrak{z} - \mathfrak{z}^0)g'(\mathfrak{z}_r') + H(\mathfrak{z}),$$

con $\mathfrak{z}_r'$ compreso fra $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{z}_r^0$.

Si ha allora che, se

$$(\min. |g'(\mathfrak{z})|) \cdot |\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_r^0| - \max. \cdot |H(\mathfrak{z})| > 0,$$

ed anche per la (31) e la (26) se

$$|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_r^0| > \frac{5\sqrt{2}}{2n^3(8n+5)},$$

esiste almeno un $\bar{\mathfrak{z}}_r^*$ in $(\mathfrak{z}_r^0 - 5\sqrt{2}/2n^3(8n+5), \mathfrak{z}_r^0 + 5\sqrt{2}/2n^3(8n+5))$ che annulla $g_0[\mathfrak{z} + v_0(\mathfrak{z})\mu + v_1(\mathfrak{z})\mu^2]$.

Poichè è per $n \geq 4$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2n^3(8n+5)} < \frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)(n+1)}, \quad \frac{5\sqrt{2}}{2n^3(8n+5)} < \frac{23\sqrt{2}}{48(n+1)},$$

abbiamo dalla (35) che lo zero $\bar{\mathfrak{z}}_r^*$ cade in $(\mathfrak{z}_r, \mathfrak{z}_r + \pi/(4n+2))$.

Posto

$$l_r = \bar{\mathfrak{z}}_r^* + v_0(\bar{\mathfrak{z}}_r^*)\mu + v_1(\bar{\mathfrak{z}}_r^*)\mu^2.$$

si ha

$$l_r > \vartheta_r - \frac{\sqrt{2}}{4n^2} - \frac{3\sqrt{2}}{8n^3} > \frac{4r-5}{4n+2}\pi = \vartheta_{r-1}, \quad l_r < \vartheta_r + \frac{\pi}{4n+2} + \frac{\sqrt{2}}{4n^2} + \frac{3\sqrt{2}}{8n^3} <$$

$$< \frac{4r+3}{4n+2}\pi = \vartheta_{r+1},$$

ne viene che essendo $g_0[\bar{\vartheta}_r^* + v_0(\bar{\vartheta}_r^*)\mu + v_1(\bar{\vartheta}_r^*)\mu^2] = 0$ è

$$\bar{\vartheta}_r^* + v_0(\bar{\vartheta}_r^*)\mu + v_1(\bar{\vartheta}_r^*)\mu^2 = \vartheta_r,$$

e si può assumere nel n. 2 $\vartheta_r^* = \bar{\vartheta}_r^*$ e sussiste perciò la limitazione

$$(36) \qquad |\vartheta_r^* - \vartheta_r^0| < \frac{5\sqrt{2}}{2n^3(8n+5)}.$$

7. *Esistenza di uno zero Θ_r di $f_n(\vartheta)$ in $(\vartheta_r, \vartheta_r + \pi/(4n+2))$ e limitazione di $|\Theta_r - \vartheta_r^0|$.*

Essendo

$$f_n(\vartheta) = g(\vartheta) + R_3(\vartheta),$$

ed assumendo la $g(\vartheta)$ valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $(\vartheta_r, \vartheta_r + \pi/(4n+2))$, [n. 5], l'esistenza di uno zero di $f_n(\vartheta)$ in tale intervallo ci viene assicurata in quanto è, per $n \geq 4$ e $[(n+2)/6] + 1 \leq r \leq [n/2]$,

$$|g(\vartheta_r)| > |R_3(\vartheta_r)|, \qquad |g(\vartheta_r + \pi/(4n+2))| > |R_3(\vartheta + \pi/(4n+2))|,$$

le quali per le (34) e la (27) equivalgono rispettivamente a

$$\frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)} > \frac{75}{2^3(2n+3)(2n+5)(2n+7)},$$

$$\frac{23\sqrt{2}}{48} > \frac{75}{2^3(2n+3)(2n+5)(2n+7)}.$$

Indicando allora con Θ_r l'r-esimo zero di $f_n(\vartheta)$ cioè di $P_n(\cos\vartheta)$ vale la limitazione

$$(37) \qquad \frac{4r-1}{4n+2}\pi < \Theta_r < \frac{4r}{4n+2}\pi, \quad n \geq 4 \quad \text{e} \quad \left[\frac{n+2}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right] \text{ (1)}.$$

(1) La limitazione di MARKOFF-STIELTJES

$$\frac{r - 1/2}{n}\pi < \theta_r < \frac{r}{n+1}\pi, \qquad (r = 1, 2, \ldots, [n/2]),$$

comprende la (37) del testo.

Cfr. G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, (New York, 1939), p. 118.

Poichè ϑ_r^0 è uno zero di $g(\vartheta)$ si ha

$$f_n(\vartheta) = (\vartheta - \vartheta_r^0)g'(\vartheta_r'') + R_3(\vartheta)$$

con ϑ_r'' compreso fra ϑ e ϑ_r^0, e allora, se

$$(\text{min.}\,|\,g'(\vartheta)\,|\,)\cdot|\,\vartheta - \vartheta_r^0\,| - \text{max.}\,|\,R_3(\vartheta)\,| > 0,$$

od anche per la (31) e la (27) se

$$|\,\vartheta - \vartheta_r^0\,| > \frac{75}{2^3(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\cdot\frac{16}{\sqrt{2}(8n+5)},$$

esiste almeno uno zero $\overline{\Theta}$ di $f_n(\vartheta)$ nell'intervallo

$$\left(\vartheta_r^0 - \frac{75\sqrt{2}}{(2n+3(2n+5)(2n+7)(8n+5)},\right.$$
$$\left.\vartheta_r^0 + \frac{75\sqrt{2}}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(8n+5)}\right).$$

Essendo inoltre, per $n \geq 4$,

$$\frac{75\sqrt{2}}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(8n+5)} < \frac{\pi}{4(2n+1)(2n+3)(n+1)},$$
$$\frac{75\sqrt{2}}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(8n+5)} < \frac{23\sqrt{2}}{48(n+1)},$$

questo zero $\overline{\Theta}$ di $f_n(\vartheta)$ cade, per la (35), in $(\vartheta_r,\ \vartheta_r + \pi/(4n+2))$.

E poichè per la (37) Θ_r è l'unico zero di $f_n(\vartheta)$ nell'intervallo $(\vartheta_r,\ \vartheta_r + \pi/(4n+2))$, si ha $\overline{\Theta} = \Theta_r$ e sussiste perciò la limitazione

$$(38)\qquad |\,\Theta_r - \Theta_r^0\,| < \frac{75\sqrt{2}}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(8n+5)} < \frac{75\sqrt{2}}{2^6 n^4}.$$

8. *Formule asintotiche per gli zeri di* P_n *(cos* ϑ*).*

Dalla (36) e dalla (38) abbiamo

$$|\,\Theta_r - \Theta_r^*\,| < \frac{5\sqrt{2}}{2n^3(8n+5)} + \frac{75\sqrt{2}}{2^6 n^4},$$

e per la (20)

$$(39)\qquad \Theta_r = \vartheta_r + \frac{2n+7}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\operatorname{cotg}\vartheta_r + \delta,$$

con

$$n \geq 4,\quad \left[\frac{n+2}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right],\quad |\,\delta\,| < |\,\Theta_r - \vartheta_r^*\,| + |\,k(\vartheta)\,| < \frac{47}{10n^4}.$$

Se ora poniamo

$$\cos\Theta_r = \xi_r, \qquad \cos\vartheta_r = x_r,$$

la (39) per $n \geq 4$, $[(n+2)/6]+1 \leq r \leq [n/2]$, valutando il secondo membro con la formula di TAYLOR arrestata alle derivate seconde dà

$$(40_1) \qquad \boxed{\xi_r = x_r\left[1 - \frac{2n+7}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\right] + \varepsilon},$$

con

$$\varepsilon = -\delta \operatorname{sen} \vartheta_r - \frac{1}{2}\left[\frac{(2n+7)\operatorname{cotg}\vartheta_r}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \delta\right]^2 \cos\varphi, \quad (\vartheta_r < \varphi < \Theta_r),$$

e perciò

$$(40_2) \qquad \boxed{|\varepsilon| < \frac{54}{10n^4}}.$$

Se applichiamo la (40_1) al calcolo dello zero ξ_5 di $P_{16}(x)$ troviamo

$$0{,}61779 < \xi_5 < 0{,}61797,$$

mentre il valore con 5 cifre decimali esatte è $\xi_5 = 0{,}61787\ldots$, [1].