Bollettino Unione Matematica Italiana

Gino Arrighi

Sulla equazione funzionale $2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 255–257.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_255_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sulla equazione funzionale $2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y)$.

Nota di Gino Arrighi (a Lucca).

Sunto. - *Si studia una equazione funzionale della composizione delle forze ricavando soluzioni continue con condizioni molto più generali di quelle poste da Picard.*

§ 1. - Il problema della composizione di due forze di eguale intensità e col medesimo punto di applicazione conduce, come noto [1], alla equazione funzionale.

$$2\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y). \tag{1}$$

Il Picard [2] presupposta la esistenza di un punto in cui $\varphi(x)$ è finita non nulla, introducendo la ipotesi che la $\varphi(x)$ sia continua, ricava le uniche soluzioni continue (soluzioni reali e di variabile reale).

$$\varphi(x) = \cos(\lambda x), \qquad \varphi(x) = \cos h(\lambda x), \tag{2}$$

con λ reale arbitrario,

Riprendendo in considerazione il problema, abbiamo trovato che, permanendo il citato presupposto di Picard, la ipotesi della continuità può essere sostituita da un'altra ben più generale e dalla quale può farsi discendere la continuità stessa; ciò che appunto faremo vedere in questa nota.

§ 2. - Poniamo infatti la seguente

Ipotesi: *La* φ(x) *ha, in un punto, limite finito da una parte.*

È da tale ipotesi, la cui generalità è ben evidente, che, fermo restando il presupposto di Picard, sarà ricavata la continuità di $\varphi(x)$ in tutto il campo reale donde discendono, come detto, le soluzioni (2).

Sia, ad esempio, finito il limite destro $\varphi(x_1{}^+)$ in x_1; dalla

$$2\varphi(x + h)^2 = \varphi(2x_1 + 2h) + 1,$$

dove si è posto $\varphi(0) = 1$ ciò che segue dal presupposto citato, per

[1] Cfr.: Emile Picard, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*. Gauthier - Villar, Paris, 1928. Cap. I. - Gino Arrighi, *Su un principio fondamentale della statica,* in Acta della «Pontificia Academia Scientiarum». Vol. XII, n. 6, pag. 24.

[2] Opera citata in [1] Pag. 9.

$h \to +0$, discende
$$2\varphi(x_1{}^+)^2 = \varphi(2x_1{}^+) + 1.$$

Cosicchè, sostituendo la considerazione di $2x$ ad x, nel caso di $\varphi(x_1{}^+) = 0$, potremo sempre supporre non nullo il limite detto in ipotesi.

Per la ipotesi e per tale considerazione, avremo garantita allora la esistenza di un intervallo chiuso (a, b), tutto interno ad un intorno destro di x_1, dove la $\varphi(x)$ esiste finita e non nulla. Con $x' \geq x''$ entrambi, e quindi anche $\frac{x' + x''}{2}$, in (a, b) dalla
$$2\varphi\left(\frac{x' + x''}{2}\right)\varphi\left(\frac{x' - x''}{2}\right) = \varphi(x') + \varphi(x'')$$
segue che la $\varphi(x)$ esiste finita per $x = \frac{x' - x''}{2}$ cioè in tutto l'intervallo chiuso $(0, c)$, con $c = \frac{b \quad a}{2}$. Con x''', e quindi anche $c - x'''$, in $(0, c)$ dalla
$$2\varphi(c)\varphi(x''') = \varphi(c + x''') + \varphi(c - x''')$$
segue che la $\varphi(x)$ esiste finita per $x = c + x'''$ cioè in tutto l'intervallo chiuso $(c + 2c)$ e quindi, con dimostrazione analoga, esiste finita per $x \geq 0$.

Tenendo conto della sua parità avremo in definitiva che la $\varphi(x)$ esiste finita in tutto il campo reale.

§ 3. - Dalla
$$2\varphi(h)\varphi(x_1 + h) = \varphi(x_1 + 2h) + \varphi(x_1),$$
per $h \to +0$, segue
$$2\varphi(0^+)\varphi(x_1{}^+) = \varphi(x^+) + \varphi(x_1)$$
e pertanto esiste finito $\varphi(0^+)$.

Dalle
$$2\varphi(h)^2 = \varphi(2h) + 1$$
$$2\varphi(2h)\varphi(h) = \varphi(3h) + \varphi(h) = \varphi(3h) + \varphi(-h),$$
per $h \to +0$, segue
$$2\varphi(0^+)^2 = \varphi(0^+) + 1 = 2\varphi(0^+) = \varphi(0^+) + \varphi(0^-)$$
ovvero $\varphi(0^+) = \varphi(0^-) = 1$, cioè la continuità di $\varphi(x)$ nel punto 0.

§ 4. - Con x qualunque, dalle
$$2\varphi(x)\varphi(h) = \varphi(x + h) + \varphi(x - h)$$
$$2\varphi(x + h)\varphi(x - h) = \varphi(2x) + \varphi(2h)$$

discende

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x+h)\\ \varphi(x-h)\end{matrix}\right\} = \varphi(x)\varphi(h) \pm \sqrt{\frac{2\varphi(x)^2\varphi(h)^2 - \varphi(2x) - \varphi(2h)}{2}}$$

ma

$$\lim_{h \to +0} [2\varphi(x)^2\varphi(h)^2 - \varphi(2x) - \varphi(2h)] = 2\varphi(x)^2 - \varphi(2x) - 1 = 0$$

e, pertanto,

$$\varphi(x^+) = \varphi(x^-) = \varphi(x)$$

con che è dimostrata la continuità di $\varphi(x)$ in tutto il campo reale.