Bollettino Unione Matematica Italiana

Federico Cafiero

A proposito dell'equazione di Clairaut modificata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 257–260.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_257_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

A proposito dell' equazione di Clairaut modificata.

Nota di FEDERICO CAFIERO (a Napoli).

Sunto. - *Si stabilisce un teorema di confronto per un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine, dal quale si deduce immediatamente un interessante teorema di* T. WAŻEWSKI *e* J. SZARCSKI *relativo alla unicità, rispetto al valore iniziale, delle soluzioni di un' equazione di* CLAIRAUT *modificata.*

Sia $f(x, y)$ continua nel rettangolo

$$R: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$$

e consideriamo l' equazione differenziale:

$$\text{(I)} \qquad y' = f(x, y).$$

Usando una denominazione di T. WAŻEWSKI e J. SZARCSKI, diremo che la (I) è un' *equazione di* CLAIRAUT *modificata* se per ogni punto interno ad R passa una retta tale che la parte di essa appartenente al rettangolo R è un integrale dell' equazione stessa ([1]).

Relativamente all' equazione di CLAIRAUT modificata, i citati Autori, con un semplice ed elegante ragionamento di carattere geometrico, sono pervenuti al seguente interessante risultato: ([2])

Gli integrali di un' equazione di CLAIRAUT *modificata sono univocamente determinati dal valore iniziale.*

In questa Nota, fruendo di un ragionamento analogo a quello

([1]) T. WAŻEWSKI e J. SZARCSKI, *Sur l' unicité des intégrales de l' equation de* CLAIRAUT *modifiée.* « Annales de la Société Polonaise de Mathématique » - Tome XX, 1947, pp. 157-160.

([2]) Cfr. lavoro citato in nota (1).

usato da T. WAŻEWSKI e da J. SZARCSKI per la dimostrazione del teorema enunciato, stabilisco un criterio di confronto relativo ad un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine che ritengo opportuno segnalare in quanto non rientra in quelli noti. Da tale teorema di confronto si deduce poi immediatamente l' unicità, rispetto al valore iniziale, delle soluzioni dell' equazione di CLAIRAUT modificata.

1. Data l' equazione differenziale (I) e detto $P_0(x_0, y_0)$ un punto interno ad R, tracciano per P_0 la retta r_0 di coefficiente angolare:

$$k_0 = f(x, y_0)$$

ed indichiamo con $S_1(\xi_1, \eta_1)$ ed $S_2(\xi_2, \eta_2)[\xi_1 < \xi_2]$ i punti comuni a tale retta ed alla frontiera di R. Supponiamo poi che, qualunque sia il punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad R, siano verificate le seguenti limitazioni:

$$f(x, y_0 + k_0(x - x_0)) \geq k_0 \text{ per } x_0 \leq x \leq \xi_2 \tag{1}$$

$$f(x, y_0 + k_0(x - x_0)) \leq k_0 \text{ per } \xi_1 \leq x \leq x_0 . \tag{2}$$

In tali ipotesi, in base ai noti teoremi di confronto [1], si può asserire soltanto che l' integrale superiore $y = G_0(x)$ dell' equazione (I), passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$ appartiene alla regione superiore [2] della retta r_0, mentre, come andiamo a dimostrare, si può addirittura asserire che *l' integrale inferiore* $y = g_0(x)$ *della* (I) *passante per* P_0 *(e quindi ogni altro) appartiene alla suddetta regione.*

Supponiamo infatti, per assurdo, che ci sia un punto $P_2(x_2, y_2)$ dell' integrale inferiore $y = g_0(x)$ non appartenente alla regione superiore della retta r_0. Per fissare le idee, sia $x_2 > x_0$. Esisterà allora tutto un arco della curva $y = g_0(x)$. con un estremo $P_1(x, y_1)$,

(1) G. PEANO, *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine* « Atti Acc. Sc. Torino, 21 (1885-86), pp. 437-445. O. PERRON, *Ein Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$*. « Math. Ann. 76 (1915), pp. 471-484. E. BAJADA, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.* Nota I. e II. « Rend. Acc. Naz. Lincei ». s. VIII, v. VIII, (1947), pp. 258-271. F. CAFIERO, *Su due teoremi di confronto relativi ad un' equazione differenziale del primo ordine.* » Bollettino della U. M. I. ». Agosto 1948, s. III, v. III, pp. 124-128.

(2) Per regione superiore (inferiore) di una curva $y = \gamma(x)$, appartenente ad R, intendiamo il dominio:

$$a_1 \leq x \leq b_1, \ \gamma(x) \leq y \leq d \qquad (a_1 \leq x \leq b_1, \ c \leq x \leq \gamma(x).$$

dove (a_1, b_1) è l' intervallo di definizione della funzione $\gamma(x)$.

di ascissa maggiore od uguale ad x_0 e minore di x_2, sulla retta r_0, costituito da punti non appartenenti alla detta regione superiore di r_0.

Osserviamo subito che la tangente in $P_1(x_1, y_1)$ alla curva integrale $y = g_0(x)$ è r_0. Infatti, essendo $x_1 \geq x_0$, per la (1) risulta:

$$f(x_1, y_1) \geq k_0$$

e ciò dimostra il nostro asserto se si osserva che il coefficiente angolare della tangente in P_1 alla curva integrale $y = g_0(x)$ non può essere maggiore di k_0.

Senza venir meno alla generalità, possiamo supporre che l'arco della curva $y = g_0(x)$ di estremi P_1 e P_2 appartenga alla regione superiore della corda $\overline{P_1P_2}$ [1]. Per il teorema di LAGRANGE esiste allora un punto $T(\xi, \eta)$ del suddetto arco della curva $y = g_0(x)$ dotato di tangente τ parallela alla corda $\overline{P_1P_2}$. Tale tangente interseca ovviamente la retta r_0 in un punto $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$ interno al rettangolo R ed il suo coefficiente angolare $k = f(\xi, \eta)$ é evidentemente minore di quello della retta r_0. Risulta cioè:

$$k_0 > k. \tag{3}$$

Ma ciò è assurdo. Infatti, essendo $\bar{x} < \xi$, per la (2), che abbiamo supposto verificata qualunque sia il punto P_0 interno ad R, risulta:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq k.$$

Inoltre, essendo $\bar{x} \geq x_0$, per la (1) deve essere:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq k_0$$

e quest' ultima limitazione, insieme alla precedente, prova l' assurdo della (3).

2. - Analogamente si dimostra che *se, qualunque sia il punto $P_0(x_0, y_0)$ interno ad R, sono verificate le limitazioni:*

$$f(x, y_0 + k_0(x - x_0)) \leq k_0 \quad \text{per } x_0 \leq x \leq \xi_2$$
$$f(x, y_0 + k_0(x - x_0)) \geq k_0 \quad \text{per } \xi_1 \leq x \leq x_0,$$

l' integrale superiore $y = G_0(x)$ dell' equazione differenziale (I) passante per il punto P_0 appartiene alla regione inferiore della retta r_0.

Supponiamo ora che l' equazione (I) sia di CLAIRAUT modificata.

[1] Sulla corda $\overline{P_1P_2}$ esiste un punto Q della curva $y = g_0(x)$, distinto da P_1 ed eventualmente coincidente con P_2, tale che l'arco della curva $y = g_0(x)$ di estremi P_1 e Q appartiene alla regione superiore della corda $\overline{P_1P_2}$.

Ne consegue che, qualunque sia il punto P_0 interno ad R, risulta:

$$f(x, y_0 + k_0(x - x_0) = k_0 \text{ per } \xi_1 \leq x \leq \xi_2$$

e quindi, in forza dei teoremi di confronto stabiliti, l' integrale superiore ed inferiore della (I) passanti per P_0 devono coincidere in (ξ_1, ξ_2) con la retta r_0. [1]