BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

COSIMO SANGERMANO

Le trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a Jacobiano nullo di caratteristica zero

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 260–267.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_260_0>

Le trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a Jacobiano nullo di caratteristica zero.

Nota di COSIMO SANGERMANO (a Parma) (*).

Sunto. - *Si studiano, dal punto di vista della geometria proiettiva differenziale, le trasformazioni puntuali fra due piani nell'intorno di una coppia di punti corrispondenti in cui il determinante Jacobiano è nullo e di caratteristica zero.*

1. Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari S_r in una coppia a Jacobiano nullo sono state studiate dal BOMPIANI, dal VILLA e da altri [1]. Però, come mi ha fatto rilevare il prof. VILLA, il caso in cui l'Jacobiano è nullo e di caratteristica zero non è stato fin qui ancora considerato e differisce profondamente dagli altri casi già studiati. Nel presente lavoro esamino appunto tale caso per $r = 2$.

2. **Intorno del 2° ordine.** — Consideriamo fra due piani proiettivi $\pi(x, y)$, $\pi'(x', y')$ una trasformazione puntuale T, e sia (O, O')

([1]) La presente Nota era già stata inviata alla stampa quando dalla recensione apparsa su « Mathematical Rewiews » (1949, vol. 10, pp. 121-122) del citato lavoro di T. WAŻEWSKI e J. SZARCSKI ho appreso che il risultato relativo all'equazione di CLAIRAUT modificata conseguito da questi Autori è un caso particolare di un teorema di R. VAN KAMPEN (*Remarks on systems of ordinary differential equations.* - « American Journal of Mathematics », vol. LIX (1937), pp. 144-146).

Il teorema di confronto segnalato nella presente Nota non rientra però nelle considerazioni fatte da R. VAN KAMPEN nel lavoro citato.

(*) I risultati del presente lavoro sono stati comunicati, nel settembre 1948, al III Congresso dell'U. M. I. a Pisa.

([1]) Si veda il lavoro recente, anche per le notizie bibliografiche sull'argomento: M. VILLA e G. VAONA: *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo*, I. *Intorno del 2° ordine*, II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci.* « Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. VIII, vol. VI, pp. 184, 278 (1949).

una coppia di punti corrispondenti in relazione alla quale il determinante jacobiano della trasformazione sia nullo e di caratteristica zero. Assumendo i punti O, O' come origini delle coordinate proiettive non omogenee nei due piani, le equazioni di T possono scriversi, nell' intorno della coppia considerata, sotto la forma:

$$x' = a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3]$$
$$y' = b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + [3],$$

avendo indicato con [3] i termini degli sviluppi in serie di grado > 2. Ogni elemento di curva di centro O e di tangente $y = mx$ viene trasformato da T in un elemento cuspidale di centro O' e la cui tangente è

$$(b_{20} + 2b_{11}m + b_{02}m^2)x' = (a_{20} + 2a_{11}m + a_{02}m^2)y'.$$

La trasformazione T subordina quindi fra le rette del fascio $O(y = mx)$ e le rette del fascio $O'(y' = m'x')$ una corrispondenza razionale $\Gamma[2, 1]$

$$(b_{20} - m'a_{20}) + 2(b_{11} - m'a_{11})m + (b_{02} - m'a_{02})m^2 = 0.$$

Alle rette del fascio O' corrispondono in Γ coppie di rette del fascio O che supporremo entrambe variabili al variare della retta per O'. Tali coppie di rette formano pertanto un'involuzione i cui raggi doppi si indicheranno con t_1, t_2.

Si diranno *rette principali* per O' quelle a cui corrispondono in Γ le coppie di rette coincidenti rispettivamente in t_1 e t_2.

Se si assumono le rette principali come assi $x' = 0$, $y' = 0$, si ha

$$a_{11}^2 - a_{02}a_{20} = 0, \quad b_{11}^2 - b_{02}b_{20} = 0.$$

e le rette t_1, t_2 hanno le equazioni

$$t_1 \equiv a_{20}x + a_{11}y = 0, \quad t_2 \equiv b_{11}x + b_{02}y = 0. \tag{2.1}$$

Le rette (2.1) si ottengono anche considerando gli elementi curvilinei corrispondenti agli E_1' di centro O'. Infatti ad ogni E_1', $y' = m'x'$, la T fa corrispondere un elemento di curva avente in O punto doppio con tangenti generalmente distinte; tali tangenti sono coincidenti qnando e solo quando l' E_1' considerato appartenga ad una retta principale. Per tale ragione chiameremo le (2.1) *rette cuspidali*.

Assumendo le rette cuspidali come assi $x = 0$, $y = 0$, si ha

$$a_{11} = b_{11} = 0.$$

Segue, essendo

$$a_{20}b_{02} \neq 0,$$
$$a_{02} = b_{20} = 0.$$

Nei riferimenti scelti le equazioni di T si scrivono

$$x' = ax^2 + [3], \quad y' = by^2 + [3],$$

dove si è posto

$$a_{20} = a\,, \; b_{02} = b.$$

3. **Intorno del 3° ordine.** — Scriviamo le equazioni di T fino all' intorno del 3° ordine

$$\begin{aligned} x' &= ax^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4] \\ y' &= by^2 + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4]. \end{aligned}$$

La curva jacobiana ha in O punto doppio con tangenti le rette cuspidali.

La sua equazione è infatti

$$\begin{aligned} 2abxy + 3ab_{21}x^3 + (6ab_{12} + 3ba_{30})x^2y + (3ab_{03} + 6ba_{21})xy^2 + \\ + 3ab_{12}y^3 + [4] = 0. \end{aligned}$$

Gli E_2 dei rami della curva jacobiana uscenti da 0 sono

$$y = -\frac{3}{2}\frac{b_{21}}{b}x^2 + [3], \quad x = -\frac{3}{2}\frac{a_{12}}{a}y^2 + [3]. \tag{3.1}$$

Le cubiche aventi in O un nodo e i cui rami contengono gli E_2 (3·1), costituiscono un sistema lineare ∞^2 di equazione

$$xy + \frac{3}{2}\left(\frac{b_{21}}{b}x^3 + \frac{a_{12}}{a}y^3\right) + 3xy(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0 \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ parametri}). \tag{3.2}$$

Le rette proiettanti da O i tre flessi di una qualunque di queste cubiche hanno per equazione complessiva

$$\frac{b_{21}}{b}x^3 + \frac{a_{12}}{a}y^3 = 0\,.$$

Assumendo una di queste rette come retta $y = -x$, si ha

$$\frac{a_{12}}{a} = \frac{b_{21}}{b}. \tag{3.3}$$

Assumendo inoltre come retta $y' = x'$ quella che ha per coppia corrispondente in Γ la $x^2 - y^2 = 0$, si ha

$$a = b\,;$$

segue dalla (3.3)

$$a_{12} = b_{21}\,.$$

L' elemento cuspidale corrispondente ad una delle rette cuspidali (ad es. la $y = 0$) è rappresentato parametricamente (parametro x) dalle equazioni

$$\begin{aligned} x' &= ax^2 + a_{30}x^3 + [4] \\ y' &= \qquad\quad b_{30}x^3 + [4]. \end{aligned}$$

Proiettando un punto generico di questo elemento cuspidale da un punto $P(0, -k)$ della retta $x'=0$ sull'asse x', si ottiene sopra questo il punto di coordinata

$$x' = k \cdot \frac{ax^2 + a_{30}x^3 + [4]}{k + b_{30}x^3 + [4]}. \tag{3.4}$$

Nasce così fra i punti dell'asse x (appartenenti all'intorno di O) e quelli dell'asse x' (appartenenti all'intorno di O') una corrispondenza Ω rappresentata dalla (3.4).

La Ω, qualunque sia il punto P scelto come centro di proiezione, è rappresentata fino all'intorno del 3° ordine di (O, O') da

$$x' = ax^2 + a_{30}x^3 + [4]$$

ed è quindi perfettamente individuata, fino a tale intorno, dalla trasformazione data. La Ω può approssimarsi fino all'intorno del 3° ordine, con le ∞^1 trasformazioni razionali [2, 1], Ω_0 rappresentate, al variare di λ, da

$$x' = \frac{ax^2}{1 - \frac{a_{30}}{a}x + \lambda x^2}.$$

I punti dell'asse x' per cui coincidono i corrispondenti in Ω_0 sono

$$\left[\left(\frac{a_{30}}{a}\right)^2 - 4\lambda\right]x'^2 + 4ax' = 0;$$

sicchè, a prescindere da O', si ottiene il punto

$$X' = \frac{4a^3}{4\lambda a^2 - a^2_{30}}$$

al quale corrisponde sull'asse x il punto

$$X = \frac{2a}{a_{30}}. \tag{3.5}$$

Poichè questo punto non dipende dalla particolare trasformazione considerata (in quanto nella (3.5) non compare λ), ma solo dalla T, esso può assumersi come punto improprio dell'asse x; si ha allora

$$a_{30} = 0.$$

In modo del tutto analogo si fissa il punto improprio dell'asse y e si ha

$$b_{03} = 0.$$

Resta in tal modo intrinsecamente determinata la retta impropria del piano π.

Si può agevolmente caratterizzare anche il punto unità in π.

Consideriamo, a tale scopo, fra le cubiche (3.2), la cubica C che ha come retta dei flessi la retta impropria del piano.

Poichè la retta dei flessi della generica cubica (3.2) ha l'equazione

$$1 + 3(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = 0\,,$$

la cubi a C che c'interessa ha l'equazione

$$xy + \frac{3}{2}\frac{a_{12}}{a}(x^3 + y^3) = 0$$

ed ha quindi per flessi i tre punti $(1, \; -\varepsilon_i, \; 0)$ (essendo gli ε_i le radici cubiche dell'unità). Le tre tangenti inflessionali hanno le equazioni

$$9a_{12}x + 9a_{12}\varepsilon_i^2 y - 2a\varepsilon_i = 0 \qquad (i = 1,\; 2,\; 3).$$

Fra queste rette, quelle relative ai due valori immaginari di ε_i, s'intersecano nel punto U di coordinate

$$-\frac{2a}{9a_{12}}, \quad -\frac{2a}{9a_{12}}\,;$$

assumendolo come punto

$$\left(-\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}\right),$$

si ha

$$3a_{12} = a.$$

4. **Riferimenti proiettivi intrinseci.** — Per ottenere un riferimento intrinseco anche nel piano π' occorre considerare l'intorno del 4° ordine di $(O, \; O')$.

Scriviamo le equazioni di T fino all'intorno del 4° ordine di $(O, \; O')$

$$\begin{aligned} x' &= ax^2 + axy^2 + 3a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + 4a_{31}x^3y + \\ &\quad + 6a_{22}x^2y^2 + 4a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + [5] \\ y' &= ay^2 + ayx^2 + 3b_{12}y^2x + b_{30}x^3 + b_{40}x^4 + 4b_{31}x^3y + \\ &\quad + 6b_{22}x^2y^2 + 4b_{13}xy^3 + b_{04}y^4 + [5]. \end{aligned}$$

La corrispondenza Ω (n. 3) che può scriversi ora fino all'intorno del 4° ordine nella forma

$$x' = ax^2 + a_{04}x^4 + [5]\,,$$

è approssimata fino al predetto intorno dall'unica trasformazione razionale $[2, \; 1]\Omega_0$

$$x' = \frac{ax^2}{1 - \dfrac{a_{40}}{a}\,x^2}.$$

Assumendo come punto improprio dell'asse x' il punto corrispondente in Ω_0 a' punto improprio dell'asse x, si ha

$$a_{40} = 0.$$

Analogamente può fissarsi il punto improprio dell'asse y' e si ha

$$b_{04} = 0.$$

Il punto unità del piano π' si può caratterizzare assumendo come punto $(1, 0)$ dell'asse x' il corrispondente, in Ω_0. dell'analogo punto dell'asse x; risulta così

$$a = 1.$$

Con ciò risultano stabiliti in entrambi i piani π, π' riferimenti proiettivi intrinseci. In tali riferimenti le equazioni di T hanno la forma canonica

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + xy^2 + 3a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + 4a_{31}x^3y + 6a_{22}x^2y^2 + \\ &\quad + 4a_{13}xy^3 + a_{04}y^4 + [5] \\ y' &= y^2 + yx^2 + 3b_{12}y^2x + b_{30}x^3 + 4b_{13}y^3x + 6b_{22}y^2x^2 + \\ &\quad + 4b_{31}yx^3 + b_{40}x^4 + [5], \end{aligned}$$

in cui tutti i coefficienti sono invarianti proiettivi.

5. Due rette intrinsecamente associate alla trasformazione. — Gli elementi cuspidali

$$(5.1)\quad \begin{cases} x' = a_{03}y^3 + a_{04}y^4 + [5] \\ y' = y^2 + [5] \end{cases} \qquad (5.2)\quad \begin{cases} x' = x^2 + [5] \\ y' = b_{30}x^3 + b_{40}x^4 + [5], \end{cases}$$

corrispondenti alle rette cuspidali, permettono di individuare due rette intrinsecamente associate a T.

Riferiamoci, per fissare le idee, all'elemento (5.2).

Fra le cubiche aventi in O' una cuspide con tangente $y' = 0$

$$(5.3)\qquad y'^2(1 - ux' - vy') - \lambda(x' - \rho y')^3 = 0$$

esistono ∞^2 cubiche aventi incontro 8-punto coll'elemento (5.2) in O'.

Esse si ottengono ponendo nella (5.3)

$$\lambda = b_{30}^2, \quad \rho = -\frac{2}{3}\frac{b_{40}}{b_{30}^2}.$$

È così intrinsecamente individuata la retta

$$x' + \frac{2}{3}\frac{b_{40}}{b_{30}^2}y' = 0$$

luogo dei punti di flesso delle ∞^2 cubiche considerate.

Analogamente partendo dall' elemento (5.1) si perviene alla retta

$$y' + \frac{2}{3}\frac{a_{04}}{a_{03}^2}x' = 0.$$

Segue immediatamente il significato geometrico dei due invarianti

$$\frac{b_{40}}{b_{30}^2}, \quad \frac{a_{04}}{a_{03}^2}.$$

6. **Alcune curve associate alla trasformazione.** — Una retta $y = \lambda x$ di π ha per corrispondente in π' un elemento cuspidale che ha per tangente in O' $y' = \lambda^2 x'$.

Il punto generico di tale elemento cuspidale, che si rappresenta parametricamente con le equazioni (parametro x)

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + (a_{03}\lambda^3 + \lambda^2 + 3a_{21}\lambda)x^3 + [4] \\ y' &= \lambda^2 x^2 + (3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30})x^3 + [4], \end{aligned}$$

viene proiettato dal punto improprio dell' asse y' sopra la retta $y' = \lambda^2 x'$ nel punto di coordinate

$$\begin{aligned} x' &= \lambda^2 x^2 + (3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30})x^3 + [4] \\ y' &= \lambda^2 x'. \end{aligned}$$

In tal modo nasce tra la retta $y = \lambda x$ e la retta $y' = \lambda^2 x'$, una corrispondenza, rappresentata, nell' intorno di (O, O') da

$$x' = \lambda^2 x^2 + (3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30})x^3 + [4],$$

Tale corrispondenza può approssimarsi, fino all' intorno del 3° ordine di (O, O'), con le ∞^1 trasformazioni razionali [2, 1]

$$x' = \frac{\lambda^2 x^2}{1 - \dfrac{3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30}}{\lambda^2}x + \rho x^2} \qquad (\rho \text{ parametro}).$$

Consideriamo fra queste quella che fa corrispondere al punto improprio di $y = \lambda x$ il punto improprio di $y' = \lambda^2 x'$, cioè la trasformazione Δ $(\rho = 0)$

$$x' = \frac{\lambda^4 x^2}{\lambda^2 - (3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30})x}.$$

I punti della retta $y' = \lambda^2 x'$ che hanno per corrispondenti, in Δ, punti coincidenti, sono il punto O' e il punto P'

$$X' = -\frac{4\lambda^6}{(3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30})^2}.$$

Il corrispondente di P', in Δ, è il punto P

$$X = \frac{2\lambda^2}{3b_{12}\lambda^2 + \lambda + b_{30}}.$$

Al variare di λ, il punto P descrive nel suo piano la curva C

$$2y^2 = x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{30}x^3,$$

mentre il punto P' descrive in π' la curva C'

$$[b_{30}{}^2x'^4 + (1 + 6b_{30}b_{12})x'^3y' + 9x'^2y'^2 + 4y'^3]^2 = 4x'^5y'(b_{30}x' - 3b_{12}y')^2.$$

La prima è una cubica cuspidata in O con tangente cuspidale $y = 0$. La seconda è una curva algebrica dell' 8° ordine, avente in O' un punto 6-plo con tangenti coincidenti nella $y' = 0$.

Analogamente partendo dalla retta $x = \nu y$ e proiettando il il punto generico del corrispondente elemento cuspidale dal punto improprio dell' asse x' sopra la tangente cuspidale, si perviene alle due curve $\overline{C}$ $\overline{C}'$

$$2x^2 = y^2x + 3a_{21}yx^2 + a_{03}y^3,$$
$$[a_{03}{}^2y'^4 + (1 + 6a_{03}a_{21})y'^3x' + 9y'^2x'^2 + 4x'^3]^2 = 4y'^5x'(a_{03}y' - 3a_{21}x')^2.$$

Alle curve C, $\overline{C}$, C', $\overline{C}'$ sono collegate delle configurazioni geometriche che permettono di determinare il significato geometrico degli invarianti del 3° ordine di T (2).